1.1 (ficha).

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} \overset{\text{I}}{=} \frac{2^3-8}{2^2-4} = \frac{0}{0}$ (INDET.)

x^2-4
$(x-2)(x+2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ +2 & & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2+2x+4 \to$

$\xrightarrow{\text{II}} \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x+4}{x+2} = \frac{2^2+2\cdot 2+4}{2+2} = \frac{12}{4} = 3$

b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^4+x^2+x-3} \overset{\text{I}}{=} \frac{1^2+1-2}{1^4+1^2+1-3} = \frac{0}{0}$ (INDET.)

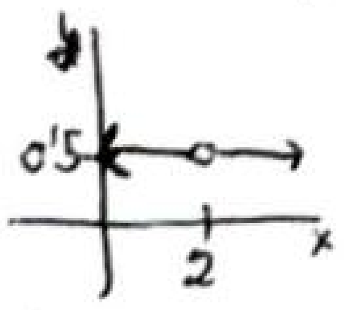
$x^2+x-2 = x^2+2x-1x+2(-1) = x(x+2)-1(x+2)$
$= (x-1)(x+2)$

$\xrightarrow{\text{II}} \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x^3+x^2+2x+3)} = \frac{1+2}{1^3+1^2+2(1)+3} = \frac{3}{7}$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

x^3+x^2+2x+3

c) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{2x-4} \overset{\text{I}}{=} \frac{2-2}{2(2)-4} = \frac{0}{0}$ (INDET.)



$\xrightarrow{\text{II}} \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{2x-4}$

$\to \lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{2x-4} = \frac{1'999-2}{2(1'999)-4} = 1/2$

$\to \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{2x-4} = \frac{2'001-2}{2(2'001-4)} = 1/2$

$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{2x-4} = 1/2$

d) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-1} \overset{\text{I}}{=} \frac{1^3+1-2}{1^2-1} = \frac{0}{0}$ (INDET.)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

x^2+x+2

$\xrightarrow{\text{II}} \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+2)}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \frac{1^2+1+2}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$

e) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x^3-5x^2+3x+9} \overset{\text{I}}{=} \frac{3^2-4(3)+3}{3^3-5(3)^2+3(3)+9} = \frac{0}{0}$ (INDET.)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 3 & 9 \\ 3 & & 3 & -6 & -9 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2-2x-3 = x^2-3x+1x-3(1) =$
$= x(x-3)+1(x-3) = (x+1)(x-3)$

$\xrightarrow{\text{II}} \lim_{x\to 3} \frac{(x-1)\cancel{(x-3)}}{(x+1)(x-3)\cancel{(x-3)}} = \frac{3-1}{(3+1)(3-3)} = \frac{2}{0}$ (INDET.)

$\xrightarrow{\text{III}} \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-4x+3}{x^3-5x^2+3x+9} = -\infty$

$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-4x+3}{x^3-5x^2+3x+9} = +\infty$

$\nexists \lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x^3-5x^2+3x+9}$

f) $\lim_{x\to a} \frac{2x^2+ax-3a^2}{3x^2-ax-2a^2} \overset{\text{I}}{=} \frac{2(a)^2+a(a)-3a^2}{3(a)^2-a(a)-2(a)^2} = \frac{2a^2+a^2-3a^2}{3a^2-a^2-2a^2} = \frac{0}{0}$ (INDET.)

$\xrightarrow{\text{II}}$

g) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x+5}{x^2+6} = \frac{2^2-2(2)+5}{2^2+6} = \frac{4-4+5}{4+6} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ //.

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2+b^2-ab)$

h) $\lim_{x\to a} \frac{x^3+a^3}{x^2-a^2} \overset{I}{=} \frac{a^3+a^3}{a^2-a^2} = \frac{2a^3}{0}$ (INDET.)

II $\rightarrow \lim_{x\to a} \frac{x^3+a^3}{x^2-a^2} = \frac{(a-0'1)^3+a^3}{(a-0'1)^2-a^2} = \frac{a^3+3(a)^2(-0'1)+3(a)(-0'1)^2+(0'1)^3}{\cancel{a^2}-2\cdot a\cdot 0'1+(0'1)^2-\cancel{a^2}} =$

$= \frac{a^3-0'3a^2+0'03a+0'001}{-0'2a+0'01}$.

$\lim_{x\to a} \frac{(x+a)(x^2+a^2-xa)}{(x+a)(x-a)} = \ldots$

i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \overset{I}{=} \frac{\sqrt{0^2+1}-1}{0} = \frac{0}{0}$ (INDET.)

II $\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)}{x}\cdot\frac{(\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+1-(1^2)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} =$

$= \frac{0}{\sqrt{0^2+1}+1} = \frac{0}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$ //.

j) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} \overset{I}{=} \frac{\sqrt{9}-3}{2-2} = \frac{0}{0}$ (INDET.)

II $\lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)}{x-2}\cdot\frac{(\sqrt{x^2+5}+3)}{(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x^2+5}+3)} =$

$= \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{2+2}{\sqrt{4+5}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ //.

13 (ficha).

a) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2}{2x+1} - \frac{x^3}{x^2+1}\right) \overset{I}{=} \infty - \infty$ (INDET.)

II $\rightarrow \lim_{x\to\infty} \left(\frac{(2x^2)(x^2+1)-(x^3)(2x+1)}{(2x+1)(x^2+1)}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{(\cancel{2x^4}+2x^2)-(\cancel{2x^4}+x^3)}{2x^3+2x+x^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-x^3+2x^2}{2x^3+x^2+2x+1}\right) =$

$= \frac{\infty}{\infty}$ (INDET.) III $\rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{-x^3+\ldots}{2x^3+\ldots} = \frac{-1}{2}$ //.

b) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x^2+1}{x}+\frac{3-x^2}{x+2}\right)\overset{\text{I}}{=}\infty+(-\infty)=\infty-\infty$ (INDET.)

$\xrightarrow{\text{II}}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(5x^2+1)(x+2)+(3-x^2)(x)}{(x)(x+2)}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x^3+10x^2+x+2+3x-x^3}{x^2+2x}\right)=$

$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^3+10x^2+4x+2}{x^2+2x}\right)=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{III}}\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3+\dots}{x^2+\dots}=4(-\infty)^3=4(-\infty)=-\infty$ //.

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-2x}-\frac{2x^2+1}{2x-4}\right)\xrightarrow{\text{I}}\infty-\infty$ (INDET.)

$\xrightarrow{\text{II}}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^3)(2x-4)-(2x^2+1)(x^2-2x)}{(x^2-2x)(2x-4)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{2x^4}-\cancel{4x^3}-(\cancel{2x^4}-\cancel{4x^3}+x^2-2x)}{2x^3-4x^2-4x^2-8x}\right)=$

$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x^2+2x}{2x^3-8x^2-8x}\right)=\frac{\infty}{\infty}$ (INDET.) $\xrightarrow{\text{III}}\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+\dots}{2x^3-\dots}=0$ //.

d) $\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+4x}\right)\overset{\text{I}}{=}\infty-\infty$ (INDET.)

$\xrightarrow{\text{II}}\lim_{x\to\infty}\left[\left(x-\sqrt{x^2+4x}\right)\cdot\frac{(x+\sqrt{x^2+4x})}{(x+\sqrt{x^2+4x})}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\cancel{x^2}-(\cancel{x^2}+4x)}{x+\sqrt{x^2+4x}}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-4x}{x+\sqrt{x^2+4x}}\right)=$

$=\frac{\infty}{\infty}$ (IND.) $\xrightarrow{\text{III}}\lim_{x\to\infty}\frac{-4x/x}{(x+\sqrt{x^2+4x})/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{(1+\sqrt{x^2/x^2+4x/x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{1+\sqrt{1+\cancel{4/x}\to0}}=$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{1+\sqrt{1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{1+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{2}=-2$ //.

e) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6}-x\right)\xrightarrow{\text{I}}\infty-\infty$ (INDET.)

$\xrightarrow{\text{II}}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(\sqrt{x^2+6}-x)(\sqrt{x^2+6}+x)}{(\sqrt{x^2+6}+x)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(\cancel{x^2}+6)-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+6}+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6}{\cancel{x}^{1/2}+6^{1/2}+x}\right)=$

$\frac{\infty}{\infty}$

$=0$ //

f) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3}\right)\overset{\text{I}}{=}\infty-\infty$ (INDET.)

$\xrightarrow{\text{II}}\lim_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3}\right)\cdot\frac{(\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-3})}{(\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-3})}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+4-\cancel{x^2}-3}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-3}}=$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-3}}\to0=0$ //.

EXAMEN 12 (ficha).

$$\lim_{x\to -1} \frac{ax^3+3x^2-2x-3}{x^2+3x+2} = \frac{a(-1)^3+3(-1)^2-2(-1)-3}{(-1)^2+3(-1)+2} = \frac{-a+3+2-3}{1-3+2} =$$

$$= \boxed{\frac{-a+2}{0}} \begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ \nexists \end{cases}$$

si $a=2$: $\lim_{x\to -1} \frac{2x^3+3x^2-2x-3}{x^2+3x+2} = \frac{0}{0}$ (INDET.)

$$\lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(2x^2+x-3)}{\cancel{(x+1)}(x-2)} = \frac{2(-1)^2+(-1)-3}{(-1-2)} = -2$$

(SÍ EXISTE).

si $a<2$: $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ $\Big\rangle \nexists$

si $a>2$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ $\Big\rangle \nexists$

Solo existe $\lim_{x\to -1} f(x)$ cuando $a=2$.

14 (ficha)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)=2 \xrightarrow{\text{I}} \lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+ax+1}-x=\infty-\infty \text{ (INDET.)}$$

$$\xrightarrow{\text{II}} \lim_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+ax+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+ax+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{ax+1}{\sqrt{x^2+ax+1}+x}=\frac{\infty}{\infty}\text{ (INDET.)} \xrightarrow{\text{III}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax+1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+ax+1}+x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\cancel{1/x}^{\to 0}}{\sqrt{1+\frac{a}{x}^{\to 0}+1/x^2}^{\to 0}+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\sqrt{1}+1}=\cancel{\lim_{x\to\infty}}\ \frac{a}{2}\Rightarrow\frac{a}{2}=2\Rightarrow\boxed{a=4}$$

15 a)

$$\lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(\frac{x-1}{3x+2}\right)}_{f(x)}^{\overset{g(x)}{x^2}}\overset{\text{I}}{=}\left(\frac{1}{3}\right)^{\infty}\text{ (INDET).}\ \to k^{\infty}$$

$$e^{\lim_{x\to a}[f(x)-1]\cdot[g(x)]}$$

$$\xrightarrow{\text{II}} \lim_{x\to\infty}f(x)=e^{\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x-1}{3x+2}\right)-1\right]\cdot\left[x^2\right]}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1-(3x+2)}{3x+2}\right)(x^2)}=$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2x^2-3x}{3x+2}\right)(x^2)}=e^{\lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(\frac{-2x^2-3x}{3x+2}\right)}_{=\frac{\infty}{\infty}\text{ (IND)}}}=e^{-\infty}=0$$

16)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}\overset{\text{I}}{=}\left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{1}{1^2-1}}=1^{\frac{1}{1-1}}=1^{\left(\frac{1}{0}\right)}\text{ (INDET.)}$$

$$\xrightarrow{\text{II}} \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(0'999)^2-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(1'001)^2-1}=+\infty$$

es decir, 1^{∞} o $1^{-\infty}$ (INDET).

$$\xrightarrow{\text{III}} \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}=e^{\lim_{x\to 1}\left[\left(\frac{1}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{x^2-1}\right)\right]}=e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}=$$

$$=e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x}{x^3-x}\right)}=(e)^{\left(\frac{0}{0}\right)}\text{ (INDET.)}$$

$$\xrightarrow{\text{IV}} \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x^3-x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x(x+1)(x-1)}$$

(como no puedo simplificar aquí, voy a asegurarme de que existe el límite)

sí se puede

$$\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{x(x+1)(x-1)}=-1/2$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x}{x^3-x}=-1/2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{x^3-x}=-1/2$$

$$e^{-1/2}=\left(e^{1/2}\right)^{-1}=\left(\sqrt{e}\right)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

c) $\lim_{x\to\infty} \underbrace{\left(\frac{x+2}{x}\right)^{3x-2}}_{f(x)} \overset{\text{I}}{=} 1^{\infty}$ (INDET).

II $\lim_{x\to\infty} f(x) = e^{\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x+2}{x}-1\right)\cdot(3x-2)\right]} = e^{\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{\cancel{x}+2-\cancel{x}}{x}\right)\cdot(3x-2)\right]} =$

$= e^{\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{2}{x}\right)\cdot(3x-2)\right]} = e^{\lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(\frac{6x-4}{x}\right)}_{\frac{\infty}{\infty}\text{(IND.)}}} = e^{6}$

d) $\lim_{x\to\infty} \underbrace{\left(x-\frac{x^3-x^2+3x}{x^2+1}\right)^{2x}}_{f(x)} \overset{\text{I}}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{x^3}+x-(\cancel{x^3}-x^2+3x)}{x^2+1}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x}{x^2+1}\right)^{2x} = 1^{\infty}$ (IND.)

II $\lim_{x\to\infty} f(x) = e^{\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x^2-2x}{x^2+1}-1\right)\cdot(2x)\right]} = e^{\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x^2-2x-(x^2+1)}{x^2+1}\right)\cdot 2x\right]}$

$= e^{\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{-2x-1}{x^2+1}\right)\cdot(2x)\right]} = e^{\lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(\frac{-4x^2-2x}{x^2+1}\right)}_{\frac{\infty}{\infty}\text{(IND.)}}} = \boxed{e^{-4} = \frac{1}{e^4}}$

16 (ficha).

a) * Función discontinua en $x=2$ de discontinuidad inevitable de salto finito.

* No tiene asíntotas.

b) * Función discontinua en $x=2$ de discontinuidad inevitable de salto infinito.

* Asíntota vertical en $x=2$ y asíntota horizontal en $y=2$.

c) * Función discontinua en $x=0$ (discontinuidad inevitable de salto infinito ~~salto finito~~) y en $x=2$ (discontinuidad inevitable de salto infinito).

* Asíntota vertical en $x=0$ y $x=2$ y asíntota horizontal en $y=0$.

17 (ficha).

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2} \Rightarrow \text{Dom } f(x)=\mathbb{R}-\{x-2=0\} \Rightarrow \boxed{\text{Dom } f(x)=\mathbb{R}-\{2\}}$.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$.

Discontinuidad en $x=2$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\dfrac{3}{0}$ (INDET.)

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\dfrac{1'999+1}{1'999-2}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\dfrac{2'001+1}{2'001-2}=+\infty$

$f(x)$ es discontinua en $x=2$ (discontinuidad inevitable de salto infinito).

b) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-5x+6} \longrightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow x^2-3x-2x-3(-2)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x-3)-2(x-3)=0 \Rightarrow \boxed{\text{Dom } f(x)=\mathbb{R}-\{2,3\}}$.

$x=2 \quad x=3$

* $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\dfrac{4}{0}$ (IND.) $\longrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\dfrac{2(1'99)}{(1'99)^2-5(1'99)+6}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\dfrac{2(2'01)}{(2'01)^2-5(2'01)+6}=-\infty$

* $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\dfrac{6}{0}$ (INDET.) $\longrightarrow \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\dfrac{2(2'99)}{(2'99)^2-5(2'99)+6}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\dfrac{2(3'01)}{(3'01)^2-5(3'01)+6}=+\infty$

$f(x)$ es discontinua en $x=2$ y $x=3$, en ambos casos por discontinuidad inevitable de salto infinito.

54

c) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2+x+1} \longrightarrow x^2+x+1=0 \quad x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\nexists\ (\in\mathbb{R})$

$\Rightarrow f(x)$ Es continua en $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{Dom } f(x)=\mathbb{R}}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2} \longrightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \text{Dom } f(x)=\mathbb{R}-\{2\}$.

* $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\dfrac{0}{0}$ (INDET.) $\longrightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}}=\lim\limits_{x\to 2} x+2=2+2=4$

* $f(2)=\nexists$

* $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\dfrac{(1'99)^2-4}{(1'99)-2}=4$

* $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\dfrac{(2'01)^2-4}{(2'01)-2}=4$

$\Rightarrow f(x)$ es discontinua en $x=2$ (discontinuidad evitable).

e) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6} \rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow x^2-3x-2x-3(-2)=0 \Rightarrow x(x-3)-2(x-3)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{matrix} x=2 \\ x=3 \end{matrix} \Rightarrow \mathrm{Dom}\, f(x)=\mathbb{R}-\{2,3\}.$

$* \lim_{x\to 2} f(x)=\dfrac{-5}{0}$ (IND.) $\rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)=\dfrac{(1'99)^2-9}{(1'99)^2-5(1'99)+6}=-\infty$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\dfrac{(2'01)^2-9}{(2'01)^2-5(2'01)+6}=\infty$

} Discontinuidad en $x=2$ inevitable de salto infinito.

$* \lim_{x\to 3} f(x)=\dfrac{0}{0}$ (IND.) $\Rightarrow \lim_{x\to 3}\dfrac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{(x-2)\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x-2}=\dfrac{6}{1}=6$

$* f(3)=\nexists (\in\mathbb{R})$.

} Discontinuidad evitable en $x=3$.

f) $f(x)=\overbrace{\sqrt{\underbrace{x^2-x-6}_{g(x)}}}^{f(x)} \rightarrow x\geq 0 \Rightarrow x^2-x-6\geq 0 \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow x^2-3x+2x-3(+2)=0 \Rightarrow$

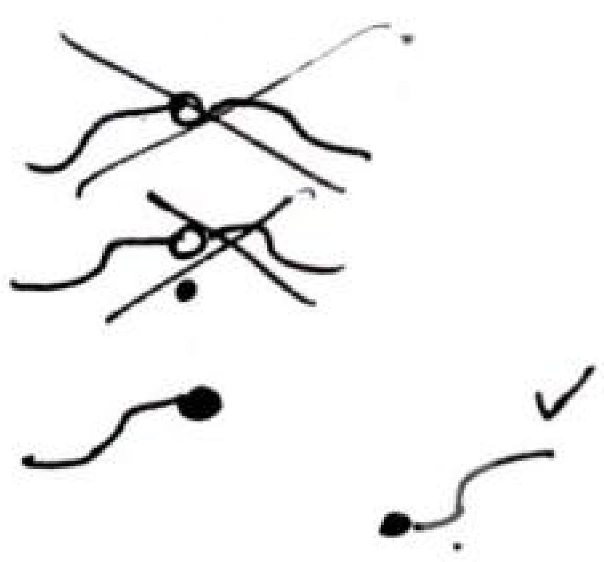
$\Rightarrow x(x-3)+2(x-3)=0 \Rightarrow (x+2)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{matrix} x=-2 \\ x=3 \end{matrix}$

(+) (−) (+)

$-\infty$ -2 0 3 $+\infty$

Si $x=-3$; $g(-3)=6$ | Si $x=0$; $g(0)=-6$

} $\mathrm{Dom}\, f(x)=\mathbb{R}-(-2,3)$.



$\rightarrow f(x)$ presenta discontinuidad inevitable en el intervalo $(-2,3)$ de salto finito.

g) $f(x)=\sqrt{\underbrace{x^2+4}_{g(x)}} \Rightarrow x^2+4\geq 0 \Rightarrow x^2+4=0 \Rightarrow x=\sqrt{-4}=\nexists(\in\mathbb{R}) \Rightarrow g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

(+) (+) (+)

$-\infty$ -2 2 $+\infty$

Si $x=-3$; $g(-3)=13$ | Si $x=0$; $g(0)=4$ | Si $x=3$; $g(3)=13$

} $\mathrm{Dom}\, f(x)=\mathbb{R}$

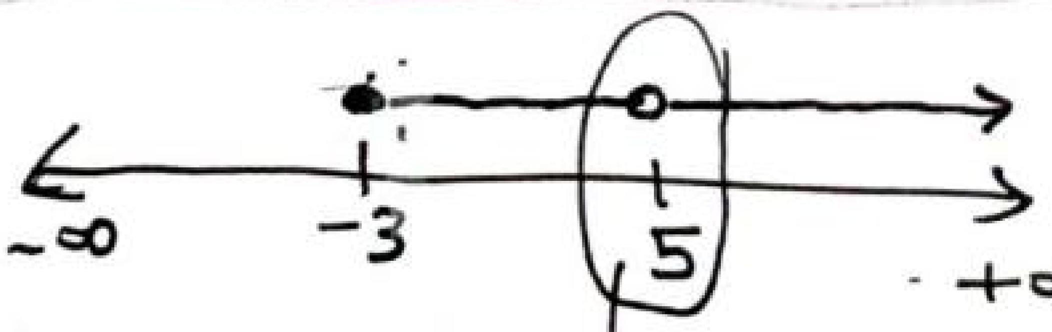
Es continua $f(x)$ en todo $\mathbb{R}$.

h) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}+2^x}{x-5}$ condiciones $\rightarrow x-5\neq 0 \Rightarrow x-5=0 \Rightarrow \boxed{x=5}$

$\rightarrow x+3\geq 0 \Rightarrow \boxed{x\geq -3}$

} $\mathrm{Dom}\, f(x)= =[-3,5)\cup(5,+\infty)$.

$-x\geq 3$
$x\leq -3$



no hay discontinuidad porque de $(-\infty,-3]$ la función no existe directamente.

$\lim_{x\to 5} f(x)=\dfrac{\sqrt{8}+2^5}{0}$ (INDET.)

$\lim_{x\to 5^-} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to 5^+} f(x)=+\infty$

~~En $x=-3$. discontinuidad inevitable de salto finito~~

En $x=5$ discontinuidad inevitable salto infinito.

discontinuidad. salto finito en $x=3$

18 (ficha)

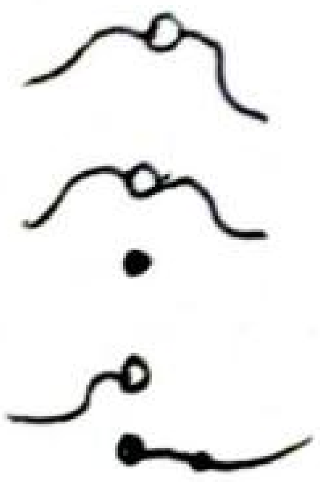
a) $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x<0 \\ x+1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases} \rightarrow ¿x=0? \nearrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = -0'001-1 = -1$

$\searrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0'001+1 = 1$

$f(0)=0+1=1$

$f(0) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

No es continua en $x=0$ (discont. inevit. de salto finito).



b) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<0 \\ 2 & \text{si } x=0 \\ 2x-1 & \text{si } x>0 \end{cases} \rightarrow x=0 \rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = (-0'001)^2-1 = -1$

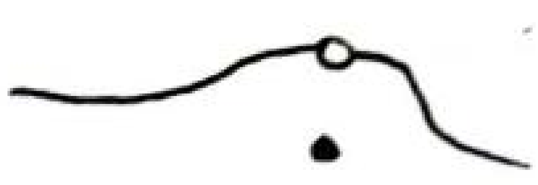
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = (0'001)\cdot 2-1 = -1$

$f(0)=2$

$f(0) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$\downarrow$

discontinuidad evitable en $x=0$.



c) $f(x)=\begin{cases} 1/x & \text{si } x<1 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ condiciones: $x\neq 0$ $\rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1/(-0'01) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1/(0'01) = +\infty$ $>$ Discontinuidad inevitable de salto infinito en $x=0$.

$x \geq 0$

$¿x=1?$

$\sqrt{x+1} \geq 0 \rightarrow$ como "$f(x)$ no toma "$\sqrt{x+1}$" cuando es menor que 1, no hay que tener esta consideración en cuenta.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1/0'99 = 1$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \sqrt{1'001+1} = \sqrt{2}$

$f(1) = \sqrt{2}$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$

discontinuidad inevitable de salto finito en $x=1$.

d) $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } x<0 \\ -x+2 & \text{si } x>0 \end{cases} \rightarrow ¿x=0? \rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = -0'001+2 = 2$

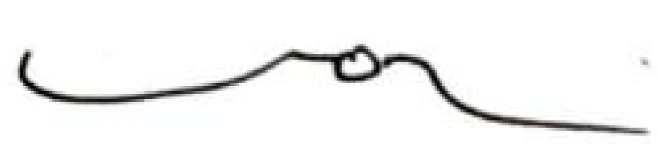
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -0'001+2 = 2$

$f(0) = \nexists$

$f(0) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$\downarrow$

Discontinuidad evitable en $x=0$.



e) $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\leq 1 \\ x^2-1 & \text{si } 1<x\leq 2 \\ x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$ $¿x=1?$ $¿x=2?$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0'99-1 = 0$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = (1'001)^2-1 = 0$

$f(1) = 1^2-1 = 0$

$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$

$\downarrow$

$f(x)$ continua en $x=1$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = (1'99)^2-1 = 3$

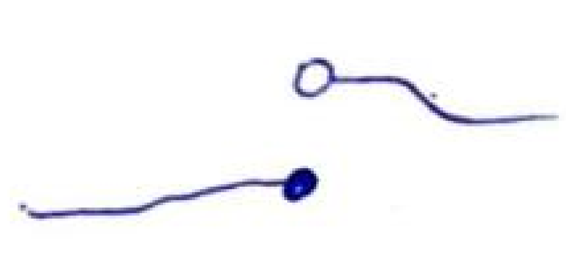
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = (2'001)^2 = 4$

$f(2) = 2^2-1 = 3$

$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$

$\downarrow$

discontinuidad inevitable de salto finito en $x=2$



f) $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x<0 \\ x^2+x+1 & \text{si } 0\leq x<3 \\ \frac{2x}{x-5} & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$ $\rightarrow ¿x=0?$ $¿x=3?$

condición $x\neq 5$

$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \frac{2(4'99)}{4'99-5} = -\infty$

$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \frac{2(5'01)}{5'01-5} = +\infty$

discontinuidad inevitable de salto infinito en $x=5$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = e^{-0'01} = 1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0'01^2+0'01+1 = 1$

$f(0) = 0^2+0+1 = 1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

$f(x)$ continua en $x=0$.

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -2'99^2+2'99+1 = 13$

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{2(3'01)}{3'01-5} = -3$ $13-(-3)=16$

$f(3) = \frac{2\cdot 3}{3-5} = \frac{-6}{2} = -3$

discont. inev. salto finito en $x=3$

(19) a) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & si\ x<0 \\ ax+b & si\ 0\leq x<1 \\ 2 & si\ x\geq 1 \end{cases}$

a? b? $\Big\rangle$ $f(x)=\mathrm{Dom}\, f(x)=\mathbb{R}$.

$x=0 \rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=(-0'01)^2+2\cdot(-0'01)-1=-1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\boxed{a(0'01)+b=-1} \Rightarrow b=-1$

$f(0)=a\cdot 0+b=\boxed{b=-1}$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

$x=1 \rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=a(0'99)^{1}+b=\boxed{a+b=2} \Rightarrow a+(-1)=2$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=2 \qquad \Rightarrow \boxed{a=3}$

$f(1)=2$

siendo $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$.

SOL.

$\Rightarrow$ Por tanto, $a=3$ y $b=-1$ para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio

b) $f(x)=\begin{cases} -2x+1 & si\ x<-2 \\ ax+2 & si\ -2\leq x\leq 2 \\ x^2+b & si\ x>2 \end{cases}$

a? b? $\Big\rangle$ $\mathrm{Dom}\, f(x)=\mathbb{R}$

$\boxed{x=-2} \rightarrow \lim_{x\to -2^-} f(x)=-2(-2'001)+1=5$

$\lim_{x\to -2^+} f(x)=a(\cancel{-1'999})^{-2}+2 \rightarrow -2a+2=5 \Rightarrow \boxed{a=-3/2}$

$f(-2)=a(-2)+2=5 \Rightarrow a=-3/2$.

con el objetivo de que $\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^+} f(x)=f(-2)$

$\Downarrow$

$f(x)$ sea continua en $\underline{x=-2}$.

$\boxed{x=2} \rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)=a(\cancel{+1'999})^{2}+2 \Rightarrow 2a+2$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=(\cancel{2'001})^{2}+b=2^2+b=4+b$

$f(2)=2a+2$

para que $f(x)$ sea continua en $x=2$,

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a+2=4+b \Rightarrow 2(-3/2)+2=4+b \Rightarrow$

$\Rightarrow -3+2=4+b \Rightarrow \boxed{b=-5}$

SOL.

$\Rightarrow$ Por tanto, para que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$, $\underline{a=-3/2}$ y $\underline{b=-5}$.

(20) ecuación $\underline{sen(x)+2x}=1$. Recurrimos al teorema de Bolzano.

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y el signo $f(a)\neq$ signo $f(b)$, existe un número "c" $\in \mathbb{R}$ (a,b) / $f(c)=0$.

- $sen(x)+2x=1 \Rightarrow sen(x)+2x-1=0 \Rightarrow f(x)=sen(x)+2x-1$.
- $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ (función trigonométrica seno).
- Por ejemplo, $[-1,1] \rightarrow f(-1)=sen(-1)+2(-1)-1=-3'017$
  $f(1)=sen(1)+2(1)-1=1'017$

ya que $\underline{\text{signo } f(-1)\neq \text{signo } f(1)}$

Por tanto, se puede afirmar que, según el teorema de Bolzano, la ecuación $sen(x)+2x=1$ tiene una solución real perteneciente al intervalo $(-1,1)$.

21 (ficha) $f(x) = 2 \cdot \cos(x) + 1$. Recurrimos al teorema de Bolzano.

Si $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$ y ~~el signo de f~~ el signo de $f(a) \neq$ signo $f(b)$, existe un número "c" $\in \mathbb{R}$ (a, b) / $f(c) = 0$.

- $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ (función trigonométrica coseno)
- En el intervalo $[0, \pi]$ $\rightarrow f(0) = 2 \cdot \cos(0) + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$.
  $\rightarrow f(\pi) = 2 \cdot \cos(\pi) + 1 = 2(-1) + 1 = -1$

π entendido como π rad $= 180°$

se cumple que signo $f(0) \neq$ signo $f(\pi)$.

$\Rightarrow$ Por tanto, $f(x)$ tiene al menos una solución real en $[0, \pi]$.
(según hipótesis teorema de Bolzano)

---

22 $f(x) = x^3 + x - 5$.
¿c? $\in (1, 3) \rightarrow f(c) = 20$

Recurrimos al teorema de los valores intermedios o de Darboux. Si $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$, $f(x)$ toma todos los valores "m" comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.

Así pues, existe un número "c" $\in \mathbb{R}$ (a, b) / $f(c) = m$.

- $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ (ya que es una función polinómica).
- Al ser continua en $\mathbb{R}$, es continua en $(1, 3)$ y, por tanto, podemos afirmar que existe un número "c" $\in \mathbb{R}$ $(1, 3)$ | $f(c) = 20$.

¿Qué valor tiene "c"?
(sabiendo que existe para $f(x)$ $\Longrightarrow f(c) \Rightarrow c^3 + c - 5 = 20 \Rightarrow c \simeq 1'51...$

23 (ficha)

$f(x) = 2\sqrt{x+2}$
$g(x) = 2^{-x}$
¿se cortan $[-2,0]$? $\Rightarrow 2\sqrt{x+2} - 2^{-x} = 0 \Rightarrow h(x) = 2\sqrt{x+2} - 2^{-x}$

Recurrimos al teorema de Bolzano.

HIPÓTESIS
- $f(x)$ y $g(x)$ deben ser continuos en $[-2,0]$
  - $\to f(x)$ es continua en $[-2,0]$. ✓
  - $\to g(x)$ es continua en $[-2,0]$. ✓
- signo $h(-2)$ debe ser opuesto al de $h(0)$ $\to h(-2) = 2\sqrt{-2+2} - 2^{-(-2)} = -4$; $-4<0$
  - $\to h(0) = 2\sqrt{0+2} - 2^{-0} = 2\sqrt{2}-1$; $2\sqrt{2}-1>$

TESIS $\Rightarrow$ Según teorema de Bolzano, existe al menos un punto del intervalo $[-2,0]$ en el cual $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en el plano.

---

24 a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x} \to \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$ → condición $x \neq 0$.

- Vertical: $\lim_{x\to 0} f(x) = \dfrac{2(0)-1}{0} = \dfrac{-1}{0}$ (INDET.)
  - $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{2(-0'01)-1}{-0'01} = +\infty$
  - $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{2(0'01)-1}{0'01} = -\infty$

  hay una asíntota vertical en $\boxed{x=0}$

- Horizontal $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{\infty}{\infty}$ (INDET.) $\to \lim_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{2}{1} = 2$
  - $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \dfrac{\infty}{\infty}$ (INDET.) $\to \lim_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{2}{1} = 2$

  hay una asíntota horizontal en $\boxed{y=2}$

Al tener $f(x)$ una asíntota horizontal, no tiene asíntotas oblicuas.

b) $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$ → condición
$x^2+1 \neq 0 \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow \underbrace{x=\sqrt{-1}\ (\nexists \in \mathbb{R})}$

por tanto, $f(x)$ no tiene asíntota vertical (es continua en $\mathbb{R}$).

• Asíntota horizontal ⇒ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{2}{\infty^2+1} = 0$
↳ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{2}{(-\infty)^2+1} = 0$

$f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $\boxed{y=0}$.
Al tenerla, ya no puede tener asíntota oblicua.

c) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ → condición
$x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow \text{Dom} f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$.

• Asíntota vertical: $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{0}$ (IND.)
↳ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{0'99^2}{0'99-1} = -\infty$
↳ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1'001^2}{1'001^2-1} = +\infty$

$f(x)$ tiene asíntota vertical en $\boxed{x=1}$

• Asíntota horizontal ⇒ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ (IND.) $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
↳ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ (IND.) $\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$f(x)$ no tiene asíntota horizontal

• Asíntota oblicua: $y = mx+n$
↳ $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-x} \underset{\frac{\infty}{\infty}\text{(IND.)}}{=} \frac{1}{1} = 1$
↳ $n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} - 1x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x(x-1)}{x-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x^2+1x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1} = 1$

Asíntota oblicua en $\boxed{y=x+1}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-2x-3}$ → condición $x^2-2x-3\neq 0 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow x^2-3x+1x-3(+1)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x(x-3)+1(x-3)=0 \Rightarrow x=-1$, $x=3$

• Asíntota vertical:

para $x=-1 \rightarrow \lim_{x\to -1} f(x)=\dfrac{2}{0}$ (IND.)

$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\dfrac{(-1'01)^2+1}{(-1'01)^2-2(-1'01)-3}=+\infty$

$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\dfrac{(-0'99)^2+1}{(-0'99)^2-2(-0'99)-3}=-\infty$

$\boxed{x=-1}$

para $x=3$

$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\dfrac{2'9^2+1}{2'9^2-2\cdot 2'9-3}=-\infty$

$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\dfrac{3'1^2+1}{3'1^2+2\cdot 3'1-3}=+\infty$

$\boxed{x=3}$

• Asíntota horizontal → $\lim_{x\to\infty} f(x)\overset{\frac{\infty}{\infty}\text{(IND.)}}{=}\dfrac{1}{1}=1$

$\lim_{x\to -\infty} f(x)\underset{\frac{\infty}{\infty}\text{(IND.)}}{=}\dfrac{1}{1}=1$

A.H. en $\boxed{y=1}$.

No hay asíntota oblicua al haber asíntota horizontal.

---

e) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$ → condición $x+2\neq 0 \Rightarrow x\neq -2 \Rightarrow \mathrm{Dom} f(x)=\mathbb{R}-\{-2\}$.

• A.V. → $\lim_{x\to -2} f(x)=\dfrac{-7}{0}$ (IND.)

$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\dfrac{-2'1\cdot 3-1}{-2'1+2}=+\infty$

$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\dfrac{-1'9\cdot 3-1}{-1'9+2}=-\infty$

A.V. en $\boxed{x=-2}$.

• A.H. → $\lim_{x\to\infty} f(x)\underset{\frac{\infty}{\infty}\text{(IND.)}}{=}\dfrac{3}{1}=3$

$\lim_{x\to -\infty} f(x)\underset{\frac{\infty}{\infty}\text{(IND.)}}{=}\dfrac{3}{1}=3$

A.H. en $\boxed{y=3}$. (No hay A.O. porque ya hay A.H.).

---

f) $f(x)=\dfrac{3x^2+2}{x}$ → condición $x\neq 0 \Rightarrow \mathrm{Dom} f(x)=\mathbb{R}-\{0\}$.

• A.V. → $\lim_{x\to 0} f(x)=\dfrac{2}{0}$ (IND.)

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\dfrac{3(-0'1)^2+2}{(-0'1)}=-\infty$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{3(0'1)^2+2}{(0'1)}=+\infty$

A.V. en $\boxed{x=0}$.

• A.H. → $\lim_{x\to\infty} f(x)\overset{\frac{\infty}{\infty}\text{(IND.)}}{=}+\infty$

$\lim_{x\to -\infty} f(x)\underset{\frac{\infty}{\infty}\text{(IND.)}}{=}-\infty$

No asíntota horizontal

• A.O. $y=mx+n$

$m=\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\frac{3x^2+2}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}\text{(IND.)}}{=}\dfrac{3}{1}=3$

$n=\lim_{x\to\infty} f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{x}-3x=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2-(3x(x))}{x}=$
$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=\dfrac{2}{\infty}=0$

$f(x)$ tiene asíntota oblicua en $\boxed{y=3x}$.