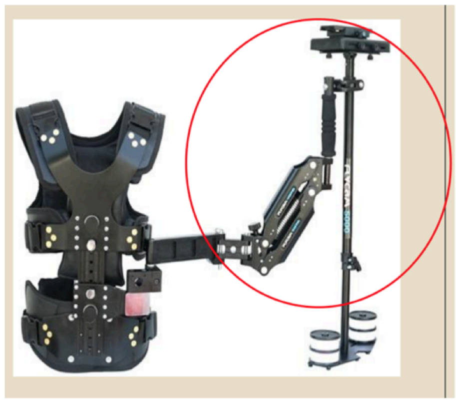
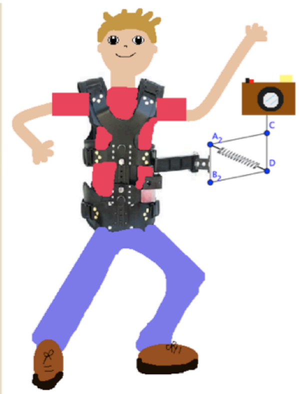
Resolución de ecuación diferencial

Universidad de Guadalajara

En este documento se analizará la forma de resolver una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden con coeficientes constantes específica, la cual modela el mecanismo de un soporte de estabilidad para una cámara de video.

La modelación matemática es el proceso de hallar un modelo matemático que reproduzca los datos obtenidos durante el estudio de un fenómeno y que nos ayude a entenderlo mejor. Así, un modelo matemático puede ser cualquier objeto matemático que sirva para tal fin: una ecuación, una desigualdad o una función, entre otros.





Entonces, por ejemplo: la ecuación que modela el movimiento del mecanismo de un brazo que sirve para estabilizar la imagen una cámara de video o fotográfica es la siguiente:

$$y'' + \frac{g\sin(\beta_0)}{x_0}\left(1 - \frac{x_0}{l_0 - l_n}\right)y = 0 \tag{0.1}$$

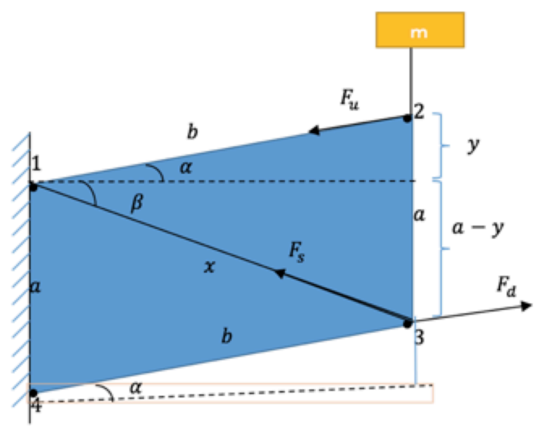


Figura 1. Modelo del brazo articulado de soporte.

de donde podemos denotar como k a la constante que acompaña a la y, de la siguiente manera:

$$k = \frac{g\sin(\beta_0)}{x_0}\left(1 - \frac{x_0}{l_0 - l_n}\right) \tag{0.2}$$

de este modo nos queda una ecucación sencilla de resolver:

$$y'' + ky = 0 \tag{0.3}$$

Notemos que esta ecuación es una Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal de segundo orden con coeficientes constantes, por lo tanto, la forma de resolverla se reduce a encontrar las raíces de la ecuación característica asociada a la ecuación 0.3. Entonces, la ecuación característica es:

$$r^2 + k = 0 \tag{0.4}$$

Puesto que la ecuación dada es de segundo orden, obtendremos dos raíces, de donde las posibles soluciones a 0.3 son:

1) Raíces reales distintas, $r_1 \neq r_2$ la solución general tiene la forma:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \tag{0.5}$$

2) Raíces reales iguales, $r_1 = r_2$ la solución general tiene la forma:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + x C_2 e^{r_1} \tag{0.6}$$

3) Raíces complejas, $r_{1,2} = a \pm ib$ la solución general tiene la forma:

$$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) \tag{0.7}$$

Ahora, calculando las raíces de 0.4, tenemos que

$$r^2 + k = 0 \tag{0.8}$$

, solution: $\left(-i\sqrt{-k}\right), i\sqrt{-k}$

Por lo tanto, observamos que el resultado corresponde a 3), la solución general de la ecuación 0.3 tiene la forma

$$y = C_1 \cos\sqrt{k}x + C_2 \sin\sqrt{k}x) \tag{0.9}$$