NÚMEROS REAIS

Índice

1. Números racionais

Os **números naturais** serven para contar os elementos dun conxunto e para ordenalos. Hai infinitos. O conxunto de todos os números naturais denótase por $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Cos números naturais pódese sumar e multiplicar sen ningún problema, é dicir, se se suman ou multiplican dous números naturais, o resultado é un novo número natural. Non obstante, non se poden restar sempre. Pódese restar 5 – 3 = 2, pero non ten sentido a operación 3 – 5.

Para que a operación 3 – 5 teña sentido necesítase un conxunto de números maior, este conxunto é o dos **números enteiros**, que se denota $\mathbb{Z}$ e está constituído polos naturais, o cero e os números negativos.

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, ...\}$$

Os números naturais están incluídos dentro do conxunto dos números enteiros:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

Cos números enteiros pódese sumar, restar e multiplicar. Non obstante, cos números enteiros non se poden levar a cabo, ou carecen de sentido, as divisións que non son exactas. Por exemplo, cos números enteiros non se pode expresar a terceira parte de algo.

Para que teñan sentido cousas tales como a terceira parte ou a cuarta parte da unidade, e en xeral todas as divisións entre dous números enteiros (salvo nas que o divisor sexa 0) introdúcese o conxunto dos **números racionais**. Os números racionais, que se denotan $\mathbb{Q}$, son todos os números da forma $\frac{p}{q}$, onde p e q son ambos enteiros, e ademais q é distinto de 0:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0 \right\}$$

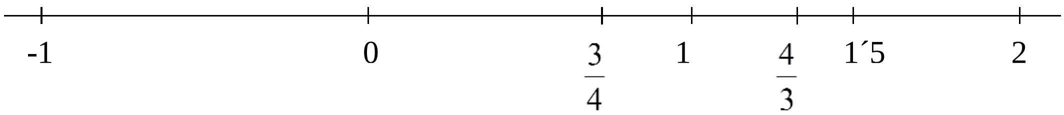
Os números racionais tamén se caracterizan pola súa forma decimal: ou ben son enteiros ou ben teñen unha expresión decimal finita ou periódica.

Por exemplo $-3 = \frac{-3}{1}$, $\frac{61}{25} = 2'44$, $\frac{13}{9} = 1'444... = 1'\widehat{4}$ son números racionais.

Hai que ter en conta que os números enteiros, e tamén os naturais, están incluídos dentro do conxunto dos números racionais:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Os números racionais poden ser representados sobre a recta. Para iso basta situar o 0 (orixe) e o 1 (unidade), co cal todos os números racionais teñen un lugar exacto sobre a recta.



A representación gráfica dos números racionais nunha recta permite entender intuitivamente unha importante propiedade que distingue a estes números dos enteiros. Entre dous números enteiros consecutivos calquera, por exemplo, o 5 e o 6, non é posible encontrar ningún outro número enteiro. Non obstante, entre dous números racionais calquera *p* e *q*, sempre é posible encontrar, non só un, se non infinitos números racionais. A esta propiedade chámaselle propiedade de **densidade**.

2. Números reais

2.1. Números irracionais

Hai números **non racionais**, é dicir, que non se poden expresar como cociente de dous números enteiros. Chámanse números **irracionais** e o conxunto de todos eles denótase por $\mathbb{I}$.
Os números irracionais exprésanse mediante infinitas cifras decimais non periódicas.

Algúns números irracionais:

Números alxébricos: os que se obteñen como raíces de ecuacións polinómicas. Por exemplo $\sqrt{2}$ (solución da ecuación $x^2 - 2 = 0$) e todos os radicais.

O número aúreo, ϕ**:** $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ é a relación entre a diagonal e o lado do pentágono regular e é o primeiro número do que se tivo conciencia de que é irracional, o cal supuxo unha gran conmoción aos pitagóricos.

O número π**:** é o cociente entre a lonxitude dunha circunferencia e a do diámetro correspondente.
A expresión decimal é π = 3´1415926535... Na práctica utilízanse como valores aproximados deste número 3´14 ou 3´1416.

O número e: aparece en moitos procesos de crecemento (crecemento da masa vexetal dun bosque, por exemplo), na desintegración radiactiva e na fórmula da catenaria, que é a fórmula que describe unha cadea, ou calquera fío flexible, que pende suxeito dos seus extremos. O seu valor decimal é e = 2,718281...

2.2. Números reais

O conxunto formado polos números racionais e os irracionais, é dicir, o conxunto de todos os números decimais posibles, chámase conxunto dos **números reais** e represéntase por $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Cada punto da recta corresponde a un número racional ou a un número irracional. Por iso á recta numérica chámaselle **recta real**.

2.3. Aproximación e erros

Todos os números reais teñen unha expresión decimal, que pode ser exacta, periódica ou ningunha das dúas cousas, é dicir, infinita e non periódica, como ocorre cos irracionais. Por esta razón, á hora de facer cálculos con eles, en moitas ocasións non se pode traballar co número exacto, se non con algunha **aproximación**. Por exemplo, úsase a aproximación 3´14 para o número π, pero non é o seu valor exacto.

En xeral, ao utilizar un número real só se precisa dunha parte do seu desenvolvemento decimal redondeando o resto das cifras por defecto ou por exceso.

As **cifras significativas** son o número de cifras exactas que se utilizan para describir unha magnitude ou un valor numérico.

O número de cifras significativas que se poden utilizar depende da necesidade da situación que se queira describir e da precisión das medidas das que se dispoña. Por exemplo, dise que unha persoa mide 1'65 utilizando 3 cifras significativas.

Os números pódense aproximar mediante truncamento e redondeo.

Truncamento: suprímense as cifras decimais dun número a partir dunha determinada cifra.
Por exemplo, 21´357604081 truncado a partir das sete primeiras cifras significativas, convértese en 21´35760; truncado a partir das catro primeiras cifras queda 21´35 e truncado a partir da parte enteira vale 21.

Redondeo: suprímense as cifras decimais dun número a partir dunha determinada cifra aplicando as seguintes regras a dita cifra:

- Se a cifra seguinte á de redondeo é menor que cinco, a última cifra do número redondeado non se cambia.
- Se a cifra seguinte á de redondeo é cinco ou maior que cinco, súmase unha unidade á cifra de redondeo.

Por exemplo, 31´457264 redondeado a tres cifras decimais queda 31´457, porque 2 < 5; redondeado a dúas cifras decimais queda 31´46, pois 7 > 5 e redondeado a unha única cifra decimal queda 31´5, xa que 5 = 5.

Ao traballar con números aproximados cométese un erro que se debe ter en conta ao avaliar os resultados obtidos.

O **erro absoluto** é a diferenza, en valor absoluto, entre o valor exacto e a aproximación.

$$Erro\ \ absoluto = |Valor\ exacto - Valor\ aproximado|$$

O **erro relativo** é o cociente do erro absoluto e o valor exacto.

$$Erro\quad relativo = \frac{Erro\quad absoluto}{Valor\quad exacto}$$

2.4. Notación científica

En moitas informacións aparecen cantidades moi grandes ou moi pequenas que se acostuman escribir como o produto dun decimal, maior que un e menor que dez, e unha potencia de dez. Así, a masa dun átomo de hidróxeno, 0´000 000 000 000 000 000 000 001 675 gramos, se escribe como $1´675·10^{–24}$ gramos e a masa da Terra, 5 976 000 000 000 000 000 000 000 kg, se escribe como $5´976·10^{24}$ kg. Esta maneira de expresar os números pequenos ou grandes chámase notación científica.

Un número escrito en **notación científica** componse dun número decimal maior que un e menor que dez multiplicado por unha potencia de dez.

Cando se multiplica un decimal por 10^n, móvese a coma n lugares cara á dereita e cando se multiplica por $10^{–n}$ (se divide por 10^n), móvese a coma n lugares á esquerda. Así, para expresar en notación científica 0´004 56 como primeiro factor tómase 4´56 e, por ter movido a coma tres lugares á dereita, como segundo ponse $10^{–3}$. Logo, 0´004 56 = $4,56·10^{–3}$. Máis sinxelo é expresar como decimal: $4´835·10^8$ = 483 500 000 (móvese a coma oito lugares á dereita).

Para sumar e restar números en notación científica é necesario que todos teñan a mesma potencia de 10; se isto non ocorre, sácase factor común á menor potencia de 10 e logo súmase. Hai que dar o resultado en notación científica. Por exemplo:
$6´31·10^8 + 4´325·10^{10} – 5´13·10^5 = (6´31·10^3 + 4´325·10^5 – 5´13)·10^5 = (6310 + 432500 – 5´13)·10^5 = 438804´87·10^5 = 4´3880487·10^{10}$.

Para multiplicar e dividir números en notación científica unicamente hai que seguir as regras de multiplicación e división de potencias da mesma base. Por exemplo:
$3´68·10^7·8´63·10^{–5} = 31´7584·10^{7–5} = 31´7584·10^2 = 3´17584·10^3$.
$3´68·10^7 : 8´63·10^{–5} = 0´4264195·10^{7–(–5)}= 0,4264195·10^{12} = 4,264195·10^{11}$.

2.5. Radicais

Unha forma simbólica de manexar algúns números reais é mediante radicais.

A **raíz enésima** dun número *a*, $\sqrt[n]{a}$, é o número real *b* que cumpre que $b^n = a$. Isto é:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

O símbolo $\sqrt[n]{a}$ chámase **radical**, o número *n* é un número natural chamado **índice da raíz** e *a* é un número real chamado **radicando**.

Se o índice é 2 a raíz chámase **cadrada** (cando non aparece ningún número no índice, enténdese que este é 2); se é 3, **cúbica**.

Se $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ existe calquera que sexa a. Se $a < 0$, $\sqrt[n]{a}$ só existe para valores impares de n.

A raíz enésima dun número tamén se pode escribir en forma de potencia:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \text{ pois } \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a$$

Por tanto, a raíz dunha potencia se pode escribir como unha potencia con expoñente racional:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \text{ pois } \sqrt[n]{a^m} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{m\cdot\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

Propiedades dos radicais

- $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$, pois $\sqrt[np]{a^p} = a^{\frac{p}{np}} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

  Esta propiedade é útil para simplificar radicais e conseguir que dous ou máis radicais teñan o mesmo índice (reducir a índice común).
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$, pois $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = a^{\left(\frac{1}{n}\right)\cdot p} = \left(a^p\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$

  Esta propiedade só é válida cando existen os radicais $\sqrt[n]{a}$ e $\sqrt[n]{a^p}$.

  Por exemplo, non se pode poñer que $\left(\sqrt{-5}\right)^4 = \sqrt{(-5)^4} = 25$, pois o primeiro radical non ten significado numérico.
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, pois $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{m}\right)} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$

  É dicir, para facer unha raíz dunha raíz, multiplícanse os índices.
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$, pois $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

  É dicir, para multiplicar dous radicais, deben ter o mesmo índice. Se os índices non son iguais, pódense reducir a un índice común usando o mínimo común múltiplo.

  Esta propiedade ten as seguintes aplicacións:
  - Extraer factores dun radical. Por exemplo:

    $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{4} = 2 \cdot \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$
  - Ao contrario, xuntar varios radicais nun só. Por exemplo:

    $\sqrt{15} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{300}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, pois $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

  Como no caso do produto, para dividir radicais, estes deben ter o mesmo índice. E o mesmo que no produto cando os índices non son iguais.

Suma de radicais

Só se poden sumar radicais que teñan o mesmo índice e o mesmo radicando. Se aparentemente non teñen o mesmo radicando, hai que descompoñer dito radicando e extraer todos os termos que se poidan da raíz, para ver se neste caso xa son operables. Por exemplo:

$$\sqrt{27}+\sqrt{48}-\sqrt{75}=\sqrt{3^3}+\sqrt{2^4\cdot 3}-\sqrt{3\cdot 5^2}=\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{2^4}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{5^2}=$$
$$=3\sqrt{3}+2^2\cdot\sqrt{3}-5\sqrt{3}=3\sqrt{3}+4\sqrt{3}-5\sqrt{3}=7\sqrt{3}-5\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

Racionalización de denominadores

Antes do uso xeneralizado das calculadoras era moi incómodo dividir un número por un radical, pois hai que dividir por un elevado número de cifras decimais. Debido a isto, buscouse o modo de converter esa división noutra na que o divisor fose enteiro. Encontráronse unhas regras que permiten **racionalizar** denominadores e que se poden encadrar en tres tipos:

- Se no denominador hai unha raíz cadrada multiplícase e divídese a fracción por dita raíz:

$$\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{a\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b^2}}=\frac{a\cdot\sqrt{b}}{b}$$

  Ao multiplicar e dividir polo mesmo número non se ve afectado o valor da fracción, pois multiplícase pola unidade.

- Se no denominador hai unha raíz de índice *n* ,($\sqrt[n]{b^m}$, m < n), multiplícase e divídese por $\sqrt[n]{b^{n-m}}$:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m}\cdot\sqrt[n]{b^{n-m}}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m\cdot b^{n-m}}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

- Se no denominador hai un binomio con raíces cadradas ($a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$), multiplícase e divídese polo seu conxugado ($a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$):

$$\frac{n}{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}}=\frac{n\left(a\sqrt{b}-c\sqrt{d}\right)}{\left(a\sqrt{b}+c\sqrt{d}\right)\left(a\sqrt{b}-c\sqrt{d}\right)}=\frac{n\left(a\sqrt{b}-c\sqrt{d}\right)}{a^2\sqrt{b^2}-c^2\sqrt{d^2}}=\frac{n\left(a\sqrt{b}-c\sqrt{d}\right)}{a^2b-c^2d}$$

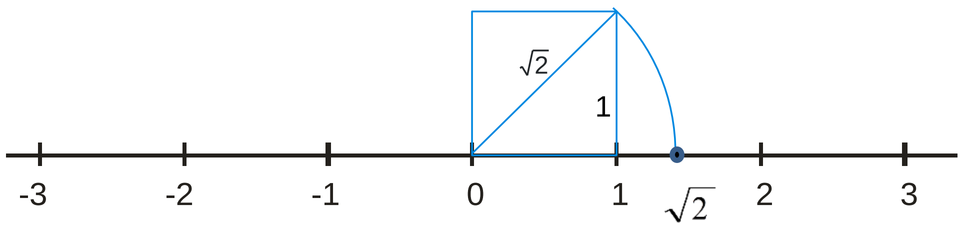
  Úsase o conxugado porque $(x + y)(x – y) = x^2 – y^2$ e así desaparecen as raíces cadradas. Obviamente se o binomio é $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$ o seu conxugado é $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$. Ao multiplicar e dividir polo conxugado sempre se terá no denominador a diferenza de cadrados, polo que se pode facer directamente e evitar pasos innecesarios.

3. A recta real

Os números reais, ao igual que os números racionais, tamén se poden representar nunha recta, **a recta real**. Tamén poñemos os positivos á dereita e os negativos á esquerda. Os enteiros e os racionais ocupan o mesmo lugar, e os “ocos" que deixaban os racionais, énchense cos irracionais, de maneira que se supón que os reais enchen toda a recta.

A representación dos números irracionais non sempre é sinxela, algunhas veces é imposible facelo exactamente, aínda que hai algúns casos en que si se pode facer dun xeito sinxelo.

Por exemplo, para representar na recta o número $\sqrt{2}$ pódese utilizar o teorema de Pitágoras e debuxar un triángulo rectángulo con catetos 1 e 1, de maneira que a lonxitude da hipotenusa sexa precisamente o número $\sqrt{2}$.

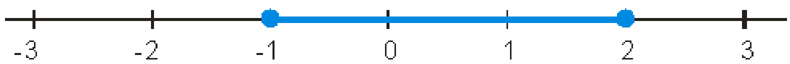


Os números reais, ao igual que acontece cos números racionais, teñen a propiedade de *densidade*, é dicir, entre cada dous números reais distintos sempre se pode atopar outro número real pero, a diferenza dos números racionais, os números reais non deixan ocos na recta: a cada punto da recta correspóndelle un número real. Neste sentido, dise que $\mathbb{R}$ é completo.

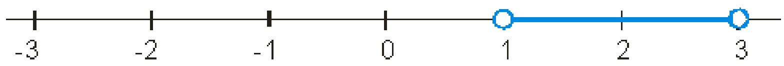
3.1. Intervalos

Para describir conxuntos de números reais, resulta útil ás veces expresalos como anacos ou segmentos da recta. A estes anacos chamáselles **intervalos**, cuxos diferentes tipos son:

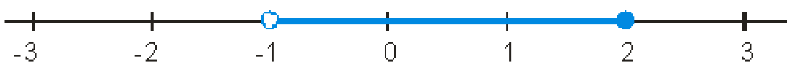
- **Intervalo pechado** [a, b] = $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
  A característica fundamental dun intervalo pechado é que están incluídos os seus extremos, o cal se indica graficamente con puntos recheos.
  Por exemplo, a representación gráfica do intervalo pechado [-1, 2] é:



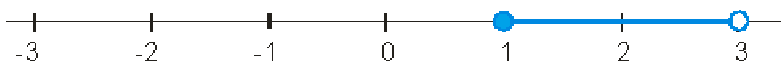
- **Intervalo aberto** (a, b) = $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
  A característica fundamental dun intervalo é que non están incluídos os extremos, o cal se indica graficamente con puntos ocos.
  Por exemplo, a representación gráfica do intervalo (1, 3) é:



- **Intervalo semiaberto** (a, b] = $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
  Por exemplo, a representación gráfica do intervalo (-1, 2] é:



- **Intervalo semiaberto** [a, b) = $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
  Por exemplo, a representación gráfica do intervalo [1, 3) é:



Incluso se poden considerar intervalos de lonxitude infinita:

- **Semirrecta aberta** (a, +∞) = $\{x \in \mathbb{R} : a < x\}$

- **Semirrecta pechada** [a, +∞) = $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$

- **Semirrecta aberta** (–∞, b) = $\{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

- **Semirrecta pechada** (–∞, b] = $\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$

∞ é o símbolo que se utiliza para representar a idea de infinito e non é un número que se atope na recta, por iso non se inclúe nos intervalos. A propia recta real pódese expresar como o intervalo (–∞, +∞).

Cando se quere nomear un conxunto de puntos formado por dous ou máis destes intervalos, utilízase o signo ∪ (unión) entre eles.

3.2. Valor absoluto, distancias e ámbitos

O **valor absoluto** dun número real *x* é o maior entre *x* e –*x* e denótase |x|.
Por exemplo, |5| = 5 e |– 3| = 3.
Tamén se pode definir, dunha forma máis precisa,

$$|x| = \begin{cases} -x, & si\ x < 0 \\ x, & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

O que significa que cando o número é negativo, se cambia de signo, e cando é positivo, se deixa tal e como está.

O valor absoluto verifica as seguintes propiedades:
Calquera que sexan os números reais *a* e *b*:

- |a| ≥ 0
- |a · b| = |a| · |b|
- |a + b| ≤ |a| + |b|. Esta propiedade, que se chama *desigualdade triangular*, expresa que o valor absoluto dunha suma é menor ou igual que a suma dos valores absolutos.

Unha das utilidades do valor absoluto é para expresar a idea de **distancia** entre dous números reais, a distancia entre os números reais *a* e *b* é a diferenza entre o maior e o menor. Como non se sabe cal deles é maior, se se resta b – a poderíase obter un número positivo ou negativo, pero as distancias han de ser sempre positivas, por esta razón, defínese a distancia entre *a* e *b* como o número |b – a|.
Por exemplo, a distancia entre –3 e 5 é |5 – (–3)| = |8| = 8, ou ben, |–3 – 5| = |–8| = 8.

Chámase **ámbito** de centro o número *a* e radio *r* > 0 ao conxunto de números reais *x*, tales que a distancia de *x* ao centro do ámbito *a* é menor que *r*. Simbolicamente:

$$E(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}$$

Tamén se pode expresar directamente como o intervalo (a – r, a + r).