Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación
y Tecnología de la Información
Estructuras Discretas III
CI-2527 Abr-Jul 2016

> *El valor dentro de un partido.*—Las pobres ovejas dicen al pastor: "Ve delante, que no nos faltará valor para seguirte." Y el pobre pastor dice para sí: "Seguidme y no me faltará valor para guiaros"
>
> Aurora, Federico Nietzsche.

Tarea 1—Números Enteros

NOMBRE CARNET NOTA

1. Demostrar que si $(a, b) = 1 \wedge (a, c) = 1$, entonces $(a, bc) = 1$.
2. Demuestre que si a y b son dos enteros tales que $(a, 4) = 2$ y $(b, 4) = 2$, entonces $4|a + b$.
3. Pruebe que para todos $a, b, k \in Z$ se tiene que $(a, b) = (a + bk, b)$.
4. Demuestre que si $a|c$, $b|c$ y $(a, b) = 1$, entonces $ab|c$.
5. Demostrar que si b es un entero positivo **compuesto**, tiene un divisor primo positivo $d \leq \sqrt{b}$.
6. *interesante* Dado un entero positivo $n \neq 1$, basándose en su descomposición en primos, halle una fórmula que permita saber cuántos divisores tiene el número n, sin tener que hallarlos.
7. *interesante* Demuestre que un número entero positivo n es un cuadrado perfecto si y sólo si tiene un número impar de divisores positivos.
8. *interesante* Demuestre que para todo par de números enteros positivos a, b se cumple que $ab = \text{mcd}\,(a, b) \cdot \text{mcm}\,(a, b)$.

Ejercicios Complementarios

1. Use el principio de buena ordenación para probar que no existe ningún entero positivo entre los enteros cero y uno.
2. Si a y b son enteros positivos y $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$, donde los p_i son todos primos distintos y los β_i's son enteros positivos, entonces $a|b$ si y sólo si $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, y se tiene que $0 \leq \alpha_i \leq \beta_i$.
3. Cuantos divisores positivos tiene n si $n = p^\alpha$, p es primo y $\alpha \geq 0$
4. Decimos que un número entero positivo n es perfecto si la suma de sus divisores es $2n$, por ejemplo, 6 es perfecto porque $1 + 2 + 3 + 6 = 12$.
   a) Verifique que 28 y 496 son perfectos.
   b) Demuestre que si $m \in Z^+$ y $2^m - 1$ es primo, entonces $2^{m-1}(2^m - 1)$ es un entero perfecto.
   (Sug.: Tal vez necesite usar esta fórmula: $\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$)
5. Demuestre que los enteros n_1, n_2, n_3 son coprimos dos a dos si y sólo si $(n_1, n_2 n_3) = (n_1 n_2, n_3) = 1$.
6. Exprese el máximo común divisor de los pares de números siguientes como combinación lineal de dichos números. Esto es, escriba en cada caso $(x, y) = sx + ty$, con s y t enteros.
   a) $(36, 9)$ b) $(11, 35)$ c) $(48, 18)$.
7. **Computacional:** Use el resultado del Ejercicio 5 (de la tarea) para diseñar un algoritmo eficiente—De orden exacto: $\Theta(\sqrt{n})$— que permita decidir si el entero positivo n es primo.

> Si yo amo el mar y todo lo que es como el mar, y le amo más cuando colérico me contradice: Si dentro de mí se agita aquel placer del que hincha sus velas en busca de lo desconocido, y me gustan los viajes del navegante: Si jamás gritó mi alegría: "La costa desaparece: he roto mi última cadena; la inmensidad me rodea; el tiempo y el espacio brillan lejos de mí. ¡Vamos! ¡En marcha, viejo corazón!", ¡Oh, cómo no he de sentir anhelos de eternidad y del anillo nupcial de los anillos: el anillo del Eterno Retorno! Nunca encontré la mujer de quien quisiera tener hijos, a no ser la mujer a quien yo amo: ¡pues yo te amo, eternidad! ¡PUES YO TE AMO ETERNIDAD!
>
> Así habló Zaratustra. Federico Nietzsche.