# ***GEOMETRIA SELECTIVITAT***

2014

**2.** Considereu el punt $A = (1, 2, 3)$.

***a)*** Calculeu el punt simètric del punt $A$ respecte de la recta d'equació

$$r: (x, y, z) = (3 + \lambda, 1, 3 - \lambda).$$

[1 punt]

***b)*** Calculeu el punt simètric del punt $A$ respecte del pla que té per equació

$$\pi: x + y + z = 3.$$

[1 punt]

***a)*** Per a fer el simètric respecte de la recta $r$ construirem primer el pla, diguem-ne $\pi'$, que talla perpendicularment la recta $r$ i que passa pel punt $A$. Aquest pla té per vector normal el vector director de $r$, és a dir $(1,0,-1)$.

Per tant és un pla d'equació $x - z = D$ i si ha de passar per $A$, tindrem $1 - 3 = D$, o sigui $D = -2$. Per tant el pla perpendicular té equació $\pi': x - z = -2$.

Calculem el punt intersecció, diguem-ne $B$, del pla amb la recta, el que seria el punt projecció del punt $A$ sobre la recta $r$, substituint l'equació paràmetrica de la recta en l'equació del pla.

$$3 + \lambda - (3 - \lambda) = -2$$

D'on tenim $\lambda = -1$ i per tant $B = (2,1,4)$.

Així el punt simètric del punt $A$ respecte de la recta, diguem-ne $A'$, l'obtindrem fent $\boxed{A'} = A + 2\overrightarrow{AB} = (1,2,3) + 2\big((2,1,4) - (1,2,3)\big) = (1,2,3) + (2,-2,2) = \boxed{(3,0,5)}$.

***b)*** Obtindrem primer el punt, diguem-ne $B$, projecció perpendicular del punt $A$ sobre el pla $\pi$, construint la recta perpendicular al pla i que passa per $A$. El vector director d'aquesta recta serà el vector normal del pla, és a dir $(1,1,1)$.

Per tant, l'equació de la recta serà $s: (x, y, z) = (1 + \lambda, 2 + \lambda, 3 + \lambda)$.
La intersecció de s i $\pi$ és quan

$$1 + \lambda + 2 + \lambda + 3 + \lambda = 3.$$

D'on tenim $\lambda = -1$ i per tant $B = (0,1,2)$.

Així el punt simètric del punt $A$ respecte del pla, diguem-ne $A'$, l'obtindrem fent $\boxed{A'} = A + 2\overrightarrow{AB} = (1,2,3) + 2\big((0,1,2) - (1,2,3)\big) = (1,2,3) + (-2,-2,-2) = \boxed{(-1,0,1)}$.

**5.** Siguin $r$ i $s$ les rectes de $\mathbb{R}^3$ d'equacions $r: \dfrac{x-2}{3} = y = \dfrac{z+1}{4}$ i $s: (x, y, z) = (1 + 2\alpha, 3 - \alpha, 4 + 3\alpha)$, amb $\alpha \in \mathbb{R}$.

***a***) Comproveu que els punts mitjans dels segments que tenen un extrem situat sobre la recta $r$ i l'altre extrem situat sobre la recta $s$ formen un pla.

[1 punt]

***b***) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla de l'apartat anterior.

***a)*** Els punts generals de les rectes $r$ i $s$ són, respectivament, de la forma

$$R = (2 + 3\lambda, \lambda, -1 + 4\lambda)$$
$$S = (1 + 2\alpha, 3 - \alpha, 4 + 3\alpha).$$

.Calculem l'expressió dels punts mitjans:

$$M = \frac{R+S}{2} = \left(\frac{3 + 3\lambda + 2\alpha}{2}, \frac{3 + \lambda - \alpha}{2}, \frac{3 + 4\lambda + 3\alpha}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + \lambda\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{4}{2}\right) + \alpha\left(\frac{2}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

I podem veure que efectivament formen un pla que és, a partir de l'expressió vectorial anterior, el que passa pel punt $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ i té per vectors directors els vectors directors de les dues rectes, és a dir $(3,1,4)$ i $(2, -1,3)$.

***b)*** Sabem que és el pla que passa pel punt $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ i té per vectors directors els vectors directors $(3,1,4)$ i $(2, -1,3)$, per tant seran els punts $(x, y, z)$ que satisfan l'equació

$$\begin{vmatrix} x - \frac{3}{2} & 3 & 2 \\ y - \frac{3}{2} & 1 & -1 \\ z - \frac{3}{2} & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$7\left(x - \frac{3}{2}\right) - 1\left(y - \frac{3}{2}\right) - 5\left(z - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\boxed{7x - y - 5z = \frac{3}{2}}$$

**3.** Siguin els punts $P = (1, 1, 0)$, $Q = (1, 0, 1)$ i $R = (0, 1, 1)$ i el pla $\pi$: $x + y + z = 4$.

***a***) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa pels punts $P$, $Q$ i $R$.

[1 punt]

***b***) Si $S$ és un punt de $\pi$, comproveu que el volum del tetraedre de vèrtexs $P$, $Q$, $R$ i $S$ no depèn del punt $S$.

a) El pla que passa pels punts $P$, $Q$ i $R$ té per vectors directors, per exemple, els vectors $\overrightarrow{PQ} = (1,0,1) - (1,1,0) = (0,-1,1)$ i $\overrightarrow{PR} = (0,1,1) - (1,1,0) = (-1,0,1)$ i per tant un punt $(x, y, z)$ del pla haurà de satisfer la igualtat (demanant que passi pel punt $P$)

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y-1 & -1 & 0 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = -x + 1 - y + 1 - z = 0.$$

És a dir $\boxed{x + y + z = 2}$.

b) Si $S$ és un punt del pla $\pi: x + y + z = 4$, aleshores S és de la forma $(x, y, 4 - x - y)$.

Així doncs el tetraedre de vèrtexs $P$, $Q$, $R$ i $S$ tindrà per arestes els vectors

$\overrightarrow{PQ} = (1,0,1) - (1,1,0) = (0,-1,1)$,

$\overrightarrow{PR} = (0,1,1) - (1,1,0) = (-1,0,1)$ i

$\overrightarrow{PS} = (x, y, 4 - x - y) - (1,1,0) = (x - 1, y - 1, 4 - x - y)$

i per tant el seu volum serà

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}\right]\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 0 & -1 & x-1 \\ -1 & 0 & y-1 \\ 1 & 1 & 4-x-y \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|-x + 1 - y + 1 - 4 + x + y|$$

$$= \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}\, u^3}.$$

que és una constant i per tant independent del punt $S$.

*Alternativament*: El volum del tetraedre no depèn del punt S ja que es tracta d'un tetraedre amb tres punts ($P$, $Q$ i $R$) sobre un pla $x + y + z = 2$ i un quart punt ($S$) sobre un pla que és paral·lel al pla anterior $x + y + z = 4$. Observem que els dos plans tenen per vector normal el vector $(1,1,1)$. Per tant tindrem sempre la mateixa "àrea de la base", l'àrea del triangle $PQR$, i la mateixa "alçada", la distància entre els dos plans.

**4.** Donats els plans $\pi_1: x - 4y + z = 2m - 1$ i $\pi_2: 2x - (2m+2)y + 2z = 3m + 1$,

***a***) Determineu els valors de $m$ perquè els plans $\pi_1$ i $\pi_2$ s'intersequin en una recta i calculeu un vector director de la recta resultant que no depengui de $m$.

[1 punt]

***b***) Sigui el pla $\pi: 3x - 2y + 3z = 8$. Estudieu la posició relativa del pla $\pi$ amb la recta $r$ definida per la intersecció dels plans $\pi_1$ i $\pi_2$ quan $m = 1$.

[1 punt]

***a)*** Que els dos plans $\pi_1$ i $\pi_2$ s'intersectin en una recta, diguem-ne $r$ vol dir que el sistema d'equacions format per les respectives equacions dels plans és compatible indeterminat.

El sistema és

$$\begin{cases} \pi_1:\ x - 4y + z = 2m - 1 \\ \pi_2:\ 2x - (2m+2)y + 2z = 3m + 1 \end{cases}$$

o en forma matricial

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 2m-1 \\ 2 & -2m-2 & 2 & 3m+1 \end{array}\right),$$

i només es tracta de garantir que la matriu de coeficients tingui rang 2, és a dir que el menor $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -2m-2 \end{vmatrix}$ sigui diferent de 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -2m-2 \end{vmatrix} = -2m - 2 + 8 = -2m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = 3.$$

| Per tant, $\pi_1$ i $\pi_2$ s'intersecten en una recta si i només si $m \neq 3$. |
|---|

Per a aquests casos el vector director de la recta $r$ serà el producte vectorial dels respectius vectors normals de cada pla, és a dir $(1,-4,1)$ i $(2,-2m-2,2)$, o el que és equivalent el producte vectorial de $(1,-4,1)$ i $(1,-m-1,1)$.

Per tant tindrem

$$v_r = (1,-4,1) \times (1,-m-1,1) = \begin{vmatrix} i & 1 & 1 \\ j & -4 & -m-1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = (m-3, 0, -m+3).$$

Ara bé com que estem en el cas $m \neq 3$, la primera i tercera component del vector $v_r$ són diferent de 0 i podem simplificar el vector dividint per $m - 3$ i obtenint un vector director equivalent i que no depèn de $m$: $\boxed{v_r = (1,0,-1)}$.

***b)*** El vector director de la recta $r$ és $v_r = (1,0,-1)$ i el vector normal del pla $\pi$ és $v_\pi = (3,-2,3)$. Com que $v_r \cdot v_\pi = 3 - 3 = 0$ aleshores els dos vectors són perpendiculars, $v_r \perp v_\pi$, i per tant $\boxed{\text{la recta } r \text{ és paral·lela al pla } \pi}$.

Per a saber si la recta $r$ està continguda o no en el pla, podem agafar un punt de $r$ i veure si satisfà l'equació del pla.

Si fem, per exemple, $x = 0$ en les equacions de $r$, obtenim el punt $(0, \frac{1}{2}, 3)$ que podem comprovar que també pertany al pla $\pi$, ja que $3 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 3 = -1 + 9 = 8$. Per tant, $\boxed{\text{la recta } r \text{ està continguda en el pla } \pi.}$

Observació: Alternativament, també es podia decidir a partir d'estudiar les interseccions dels plans $\pi_1$, $\pi_2$ i $\pi$, per al cas $m = 1$, i veure que es tracta d'un sistema compatible indeterminat.

**1.** Siguin $r$ i $s$ les rectes de $\mathbb{R}^3$ d'equacions

$$r: x + 5 = y - 5 = \frac{z-3}{2}$$

$$s: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

***a)*** Estudieu el paral·lelisme i la perpendicularitat entre les rectes $r$ i $s$.

[1 punt]

***b)*** Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla $\pi$ que conté la recta $r$ i és paral·lel a la recta $s$. Calculeu la distància entre la recta $s$ i el pla $\pi$ obtingut.

---

***a)*** Els vectors directors de les rectes $r$ i $s$ són $v_r = (1,1,2)$ i $v_s = (2,3,-1)$.

Els vectors $v_r$ i $v_s$ no són proporcionals, ja que un no és múltiple de l'altre $(\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3} \neq \frac{2}{-1})$ i per tant les rectes $\boxed{r \text{ i } s \text{ no són paral·leles}}$.

El producte escalar dels dos vectors directors és $v_r \cdot v_s = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = 3 \neq 0$ per tant les rectes $\boxed{r \text{ i } s \text{ no són perpendiculars}}$.

***b)*** Si el pla $\pi$ ha de contenir la recta $r$ aleshores $v_r = (1,1,2)$ serà un dels seus vectors directors i el pla $\pi$ haurà de passar pel punt de la recta $P_r = (-5,5,3)$. Per altra banda si el pla $\pi$ ha de ser paral·lel a la recta $s$ aleshores $v_s = (2,3,-1)$ serà també un dels vectors directors del pla.

Així doncs, l'equació general del pla $\pi$ s'obtindrà de la igualtat:

$$\begin{vmatrix} x+5 & 1 & 2 \\ y-5 & 1 & 3 \\ z-3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Quan desenvolupem obtenim $(x+5)(-7) - (y-5)(-5) + (z-3)1 = 0$.

Amb el que tenim $\boxed{\pi: -7x + 5y + z = 63}$.

Com que el pla $\pi$ és paral·lel a la recta $s$,

$$d(s,\pi) = d(P_s,\pi) = d\big((3,2,-1), -7x+5y+z-63=0\big)$$
$$= \frac{|(-7)\cdot 3 + 5\cdot 2 + (-1) - 63|}{\sqrt{(-7)^2+5^2+1^2}} = \frac{75}{\sqrt{75}} = \sqrt{75} = \boxed{5\sqrt{3}}.$$

2013

**5.** Donats els punts $P=(1,\ 0,\ -1)$ i $Q=(-1,\ 2,\ 3)$, trobeu un punt $R$ de la recta $r: \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-3}{-1}$ que compleixi que el triangle de vèrtexs $P$, $Q$ i $R$ és isòsceles, en què $\overline{PR}$ i $\overline{QR}$ són els costats iguals del triangle.

**Solució 1**

El punt $R$ de la recta és de la forma $R = (-3+2\lambda, -4+3\lambda, 3-\lambda)$ (equacions paramètriques de la recta). Volem que $d(P,R) = d(Q,R)$.

$$d(P,R) = \sqrt{(-3+2\lambda-1)^2 + (-4+3\lambda-0)^2 + (3-\lambda+1)^2} = \sqrt{14\lambda^2 - 48\lambda + 48};$$
$$d(Q,R) = \sqrt{(-3+2\lambda+1)^2 + (-4+3\lambda-2)^2 + (3-\lambda-3)^2} = \sqrt{14\lambda^2 - 44\lambda + 40}.$$

Cal que $14\lambda^2 - 48\lambda + 48 = 14\lambda^2 - 44\lambda + 40$. La solució d'aquesta equació és $\lambda = 2$. El punt buscat és $R = (1,2,1)$.

**Solució 2**

Busquem l'equació del pla que passa pel punt mig del segment $\overline{PQ}$ amb vector característic $\overrightarrow{PQ}$; tots els punts d'aquest pla equidisten de $P$ i $Q$. Després es busca la intersecció entre aquest pla i la recta $r$.

Punt mig: $M = \dfrac{P+Q}{2} = (0,1,1)$.

Vector característic: $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-2,2,4)$.

Equació del pla: $-2(x-0) + 2(y-1) + 4(z-1) = 0 \Longrightarrow x + y + 2z + 3 = 0$.

Substituint l'expressió general dels punts de la recta $r$, $R = (-3+2\lambda, -4+3\lambda, 3-\lambda)$ en l'equació del pla, obtenim que $\lambda = 2$, igual que en l'apartat anterior.

També es pot acabar aquest segon procediment resolent el sistema d'equacions lineals format per dues equacions obtingudes de la recta $r$ i l'equació del pla que hem trobat.

***1.- Sigui*** $\pi : 3x - 2y + z = 10$ ***.***

$(a)$ ***Trobeu l'equació contínua de la recta*** $r$ ***perpendicular a*** $\pi$ ***que passa pel punt*** $P = (-1, 3, 2)$***.***

$(b)$ ***Trobeu també l'equació cartesiana (és a dir, de la forma*** $Ax + By + Cz + D = 0$***) del pla*** $\pi_1$ ***paral·lel a*** $\pi$ ***que passa pel mateix punt*** $P$***.***

[1 punt per cada apartat]

**Solució**

$(a)$ Podem agafar com a vector director de la recta el vector característic del pla. Amb això,

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{1}\,.$$

$(b)$ Els plans paral·lels a $\pi$ tenen per equació $3x - 2y + z + D = 0$. Com que ha de passar pel punt $P$, cal que

$$3(-1) - 2 \cdot 3 + 2 + D = 0\,.$$

D'aquí, $D = 7$. L'equació cartesiana del pla $\pi_1$ és $3x - 2y + z + 7 = 0$.

També es pot utilitzar la fórmula $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$; és a dir,

$$3(x+1) - 2(y-3) + (z-2) = 0\,.$$

***4.- Un triangle d'àrea*** $3/2$ ***té dos dels seus vèrtexs als punts*** $P = (0, 0, 0)$ ***i*** $Q = (2, 0, 1)$***. El tercer vèrtex,*** $R$***, és un punt de la recta***

$$r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

***i té la primera coordenada no nul·la. Calculeu les coordenades del vèrtex*** $R$***.***

[2 punts]

De les equacions que defineixen la recta $r$, es dedueix que qualsevol punt de la recta ha de ser, per exemple, de la forma $R = (-1 - z, 1, z)$ (també és possible, evidentment, posar $R = (x, 1, -1 - x)$). Hi ha altres formes d'arribar a la mateixa expressió, tal com buscar el vector director de la recta $r$,

$$v_r = (1, 1, 1) \times (0, 1, 0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -i + k = (-1, 0, 1)\,,$$

un punt de la recta, com $A = (-1, 1, 0)$ (i molts altres), i construir les equacions paramètriques de la recta, $x = -1 - \lambda$, $y = 1$, $z = \lambda$; amb això, $R = (-1 - \lambda, 1, \lambda)$.

Una vegada localitzat el punt $R$, hi ha al menys dos camins per acabar el problema.

**Solució 1**

L'àrea d'un triangle de vèrtexs $P$, $Q$ i $R$ es pot calcular mitjançant la fórmula $A = \dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\|$. Amb això,

$$A = \frac{1}{2}\|(2,0,1)\times(-1-z,1,z)\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ -1-z & 1 & z \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\|(-1,-3z-1,2)\| = \frac{1}{2}\sqrt{9z^2+6z+6}\,.$$

Volem que aquesta àrea sigui $3/2$. Per tant, cal resoldre l'equació $\sqrt{9z^2+6z+6} = 3$. Elevant al quadrat i realitzant les operacions adequades, arribem a l'equació $9z^2+6z-3=0$, que té com a solucions $z=-1$ i $z=1/3$.

D'entrada, doncs, hi ha dos possibles punts $R$,

$$R_1 = (0,1,-1) \;\text{ i }\; R_2 = \left(-\frac{4}{3},1,\frac{1}{3}\right).$$

D'acord amb l'enunciat, ens hem de quedar amb el que té la primera component no nul·la. És a dir, $R=(-4/3,1,1/3)$.

**Solució 2**

El problema es pot resoldre també buscant una base i l'altura corresponent del triangle. Per exemple, podem fer

$$b = d(P,Q) = \sqrt{2^2+0^2+1^2} = \sqrt{5}\;;\quad h = d(R,\overline{PQ}) = \frac{\|\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PQ}\|}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{\sqrt{9z^2+6z+6}}{\sqrt{5}}\,.$$

Llavors, $\dfrac{bh}{2} = \dfrac{3}{2}$ ens porta a $\sqrt{9z^2+6z+6} = 3$. A partir d'aquí, se segueix com a la solució 1.

***1.- Siguin $\pi_1$ el pla $2x+3y-z=4$ i $\pi_2$ el pla $x-2y-4z=10$.***

$(a)$ ***Comproveu que els plans $\pi_1$ i $\pi_2$ són perpendiculars.***

$(b)$ ***Trobeu l'equació contínua de la recta paral·lela als plans $\pi_1$ i $\pi_2$ i que passa pel punt $P=(-1,3,2)$.***

[1 punt per cada apartat]

**Solució**

$(a)$ Un vector característic de cada un dels plans és $v_1=(2,3,-1)$ i $v_2=(1,-2,-4)$, respectivament. Els plans són perpendiculars si els seus vectors característics també ho són, és a dir, si el producte escalar dels vectors característics dóna zero.

$$v_1\cdot v_2 = 2\cdot 1 + 3(-2) + (-1)(-4) = 2-6+4 = 0\,.$$

$(b)$ Si la recta $r$ és paral·lela als dos plans, el seu vector director $v_r$ és perpendicular als vectors característics del dos plans. Per tant, podem agafar

$$v_r = v_1\times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -14i+7j-7k = (-14,7,-7)\,,$$

o qualsevol proporcional a ell com, per exemple, $(2,-1,1)$. L'equació buscada és

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1}\,.$$

***3.- Donats els punts*** $P=(1,-1,2)$ **,** $Q=(2,0,1)$ ***i*** $R=(3,2,-1)$**,**

$(a)$ ***Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma*** $Ax+By+Cz+D=0$***) del pla que determinen.***

$(b)$ ***Trobeu un punt*** $S$ ***pertanyent a la recta*** $r:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-5}{-3}$**, de manera que el tetraedre de vèrtexs** $P$ **,** $Q$ **,** $R$ **,** $S$ ***tingui volum 1/2.***

[1 punt per cada apartat]

**Solució**

$(a)$ L'equació cartesiana del pla, $Ax+By+Cz+D$, ha de ser satisfeta pels tres punts donats. Per tant,

$$\left.\begin{array}{r} A\cdot 1+B(-1)+C\cdot 2+D=0 \\ A\cdot 2+B\cdot 0+C\cdot 1+D\ =0 \\ A\cdot 3+B\cdot 2+C(-1)+D=0 \end{array}\right\}.$$

La solució d'aquest sistema d'equacions és $A=0$ , $B=-D$ , $C=-D$ . Fent $D=1$ , l'equació del pla buscat és $y+z-1=0$ .

Aquest apartat es pot resoldre d'altres maneres. Per exemple, trobant directament l'equació fent

$$\begin{vmatrix} 2-1 & 3-1 & x-1 \\ 0+1 & 2+1 & y+1 \\ 1-2 & -1-2 & z-2 \end{vmatrix}=0 \iff y+z-1=0\,.$$

$(b)$

## Solució 1

El punt $S$, per pertànyer a la recta $r$, és de la forma $S=(5+2\lambda,1-\lambda,5-3\lambda)$. El volum del tetraedre de vèrtexs $P$ , $Q$ , $R$ i $S$ és

$$V=\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PS}\right)\right|=\frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4+2\lambda \\ 1 & 3 & 2-\lambda \\ -1 & -3 & 3-3\lambda \end{vmatrix}|=\frac{1}{6}|5-4\lambda|\,.$$

Com que volem que $V=1/2$ , ens queda $|5-4\lambda|=3$ . Això ens dóna dues possibilitats:

- $5-4\lambda=3$ ;
- $5-4\lambda=-3$ .

De la primera, $\lambda=\dfrac{1}{2}$ i el punt és $S_1=\left(6,\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{2}\right)$; de la segona, $\lambda=2$ i el punt buscat és $S_2=(9,-1,-1)$ . Com que solament es demana un punt, la solució és qualsevol dels dos punts.

**Solució 2**

Sigui $S=(x,y,z)$ el punt buscat. El volum dels tetraedre és

$$V=\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PS}\right)\right|=\frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 1 & 3 & y+1 \\ -1 & -3 & z-2 \end{vmatrix}|=\frac{1}{6}|y+z-1|\ ;\ \ V=\frac{1}{2}\iff |y+z-1|=3\,.$$

De l'expressió contínua de l'equació de la recta se'n treuen dues equacions; per exemple, $x+2y=7$ , $3y-z=-2$ . Amb elles i la que ens proporciona el volum del tetraedre podem muntar dos sistemes,

$$\left.\begin{array}{l} y+z-1=3 \\ x+2y=7 \\ 3y-z=-2 \end{array}\right\}$$

que té per solució $x=6$, $y=1/2$, $z=7/2$, i

$$\left.\begin{array}{l} y+z-1=-3 \\ x+2y=7 \\ 3y-z=-2 \end{array}\right\}$$

amb la solució $x=9$, $y=-1$, $z=-1$.

**Solució 3**

Ja que tenim l'equació del pla determinat pels punts $P$, $Q$ i $R$, podem buscar el volum del tetraedre amb la fórmula $V=\dfrac{A_b\cdot h}{3}$, essent $A_b$ l'àrea del triangle base i $h$ l'altura del tetraedre.

$$A_b=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\|=\|(0,1,1)\|=\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

$$h=d(S,\pi)=\frac{|y+z-1|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\frac{|y+z-1|}{\sqrt{2}}\,.$$

Llavors,

$$V=\frac{A_b\cdot h}{3}=\frac{1}{6}|y+z-1|\,.$$

A partir d'aquí se segueix com a la solució 2. Evidentment, el procés es igualment correcte agafant $S=(5+2\lambda,1-\lambda,5-3\lambda)$.

***5.- Considereu els punts $A=(-1,2,4)$ i $B=(3,0,-2)$.***

$(a)$ ***Trobeu l'equació del pla format per tots els punts que equidisten de $A$ i $B$.***

$(b)$ ***Donat un punt $C=(x,y,z)$, dividim el segment $\overline{AC}$ en tres parts iguals, obtenint els punts $A$, $A_1$, $B$ i $C$. Trobeu el punt $C$.***

[1 punt per cada apartat]

$(a)$ Descriurem dues solucions.

**Solució 1**

Els punts $X$ que equidisten de $A$ i $B$ compleixen que $d(A,X)=d(B,X)$. És a dir,

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2}=\sqrt{(x-3)^2+y^2+(z+2)^2}\,.$$

Elevant al quadrat els dos membres de l'equació, fent les operacions indicades i les simplificacions adequades, arribem a $2x-y-3z+2=0$, que és l'equació del pla buscat.

**Solució 2**

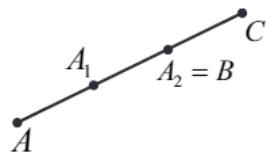
El pla buscat és el que passa pel punt mig del segment $\overline{AB}$, amb vector característic $\overrightarrow{AB}$. El punt mig és $M=\dfrac{A+B}{2}=(1,1,1)$, i el vector és $\overrightarrow{AB}=(4,-2,-6)$. L'equació del pla es pot escriure com

$$4(x-1)-2(y-1)-6(z-1)=0\,;\quad \text{és a dir,}\ \ 2x-y-3z+2=0\,.$$

$(b)$ Explicitarem tres solucions.

**Solució 1**

Quan dividim un segment $\overline{AC}$ en tres parts iguals, obtenim dos nous punts $A_1$ i $A_2$ de manera que $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_2C}$.




A l'enunciat ens diuen que $A_2 = B$. Llavors,

$$\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AA_1} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{AC} = 3 \cdot \overrightarrow{AA_1}.$$

D'aquí, $\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{AC}$.

$$\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\,(B - A) = \frac{1}{2}\,(4, -2, -6) = (2, -1, -3)\,; \quad \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(x+1, y-2, z-4)\,.$$

Finalment, de que $\dfrac{1}{3}(x+1, y-2, z-4) = (2, -1, -3)$ se'n dedueix $x = 5$, $y = -1$ i $z = -5$. El punt buscat és $C = (5, -1, -5)$.

## Solució 2

L'equació vectorial de la recta que passa pels punts $A$ i $B$ és

$$X = A + \lambda\overrightarrow{AB}\,, \quad \text{és a dir,} \quad X = (-1, 2, 4) + \lambda(4, 2, -6).$$

És evident que per $\lambda = 1$, tenim que $X = B$. Llavors, per $\lambda = 3/2$ obtindrem el punt $C$,

$$C = A + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 4) + \frac{3}{2}(4, -2, -6) = (5, -1, -5).$$

**Solució 3**

Podem observar que $A_1$ és el punt mig del segment $\overline{AB}$ i que $B$ és el punt mig del segment $\overline{A_1C}$. Llavors,

$$A_1 = \frac{A+B}{2} = (1, 1, 1) \;\text{ i }\; B = \frac{A_1 + C}{2} \Longrightarrow (3, 0, -2) = \frac{1}{2}(x+1, y+1, z+1).$$

La solució és $x = 5$, $y = -1$ i $z = -5$.

2012

***3.- Donats el pla*** $\pi\colon x+2y-z=3$ ***i la recta*** $r\colon \dfrac{x-1}{2}=y=\dfrac{z+m}{4}$ ***,***

$(a)$ ***Comproveu que el vector característic (o normal) de*** $\pi$ ***i el vector director de*** $r$ ***són perpendiculars.***

$(b)$ ***Estudieu la posició relativa de*** $\pi$ ***i*** $r$ ***en funció del paràmetre*** $m$***.***

[1 punt per cada apartat]

**Solució**

$(a)$ El vector característic del pla és $v_\pi=(1,2,-1)$; el vector director de la recta és $v_r=(2,1,4)$. Aquests vectors seran perpendiculars si i sol si el seu producte escalar és nul.

$$(1,2,-1)\cdot(2,1,4)=1\cdot 2+2\cdot 1+(-1)\cdot 4=2+2-4=0\,,$$

$(b)$ Tenint en compte l'apartat anterior, la recta i el pla solament poden ser paral·lels o incidents (la recta està continguda dins del pla). En aquest segon cas, qualsevol punt de la recta ha de complir l'equació del pla. Agafem el punt $P=(1,0,-m)$; aquest punt pertany al pla si i sol si $1+2\cdot 0-(-m)=3$; és a dir, si i sol si $m=2$.

En definitiva, si $m=2$, la recta està continguda al pla; si $m\neq 2$, la recta i el pla són paral·lels.

***5.- Donats el pla*** $\pi : 2x-y+3z-8=0$ ***i el punt*** $P=(6,-3,7)$***,***

$(a)$ ***Trobeu l'equació contínua de la recta que passa per*** $P$ ***i és perpendicular a*** $\pi$***.***

$(b)$ ***Trobeu el punt del pla*** $\pi$ ***que està més proper al punt*** $P$***.***

[1 punt per cada apartat]

**Solució**

$(a)$ Podem agafar com a vector director de la recta que busquem el vector característic del pla $\pi$; llavors, l'equació contínua de la recta és

$$\frac{x-6}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-7}{3}\,.$$

$(b)$ El punt del pla més proper al punt $P$ és el que es troba a la recta perpendicular al pla passant per $P$. Així, el punt que estem buscant és la solució de les equacions

$$\frac{x-6}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-7}{3},\quad \text{juntament amb}\ \ 2x-y+3z-8=0\,.$$

Hi ha vàries formes de resoldre el sistema. Una d'elles és convertint l'equació contínua de la recta en dues equacions,

$$\frac{x-6}{2}=\frac{y+3}{-1}\Longrightarrow x+2y=0\,;\qquad \frac{y+3}{-1}=\frac{z-7}{3}\Longrightarrow 3y+z=-2\,.$$

Ajuntant aquestes dues equacions amb la del pla ens queda un sistema,

$$\left.\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 0 \\ 3y + z & = & -2 \\ 2x - y + 3z & = & 8 \end{array}\right\} ,$$

que té per solució $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$.

Una altra forma és passar l'equació de la recta a la forma paramètrica,

$$x = 6 + 2\lambda \ , \quad y = -3 - \lambda \ , \quad z = 7 + 3\lambda \ ,$$

i substituir aquests valors a l'equació del pla,

$$2x - y + 3z - 8 = 0 \Longrightarrow 2(6 + 2\lambda) - (-3 - \lambda) + 3(7 + 3\lambda) - 8 = 0 \Longrightarrow 14\lambda + 28 = 0 \Longrightarrow \lambda = -2 \, .$$

Les coordenades del punt són $x = 6 + 2(-2) = 2$, $y = -3 - (-2) = -1$, $z = 7 + 3(-2) = 1$.

D'una manera o altra, el punt buscat és $Q = (2, -1, 1)$.