UNIVERSIDAD PROVINCIAL DE EZEIZA

Parcial Matemática I - 2013

UPE

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2013	**Parcial de MATEMÁTICA I** **2/10/13 – Turno Noche**	**Tema 2**

APELLIDO: **NOMBRE:** **DNI:**

Grilla de corrección

NOTA

<table>
<tr><th rowspan="1">1</th><th>2</th><th colspan="3">3</th><th colspan="2">4</th><th>5</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1,75</td><td rowspan="2">1,75</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>a</td><td>b</td><td rowspan="2">2,30</td></tr>
<tr><td>0,80</td><td>0,80</td><td>1</td><td>0,80</td><td>0,80</td></tr>
</table>

Lea atentamente cada ítem del examen antes de comenzar. Debe resolverlo en tinta. Identifique cada hoja que utilice con los datos solicitados en el encabezamiento de este examen.

Al momento de evaluar el Docente observará:

- La claridad y la prolijidad en el planteo de la solución y la debida justificación de cada paso, si así se requiriese.
- La originalidad de la respuesta en tanto ésta revela la forma en que el alumno organiza los conceptos puestos en juego en la misma.
- El desarrollo de todos los ítems del examen.

El puntaje señalado en cada ítem se alcanza si se responde correctamente lo pedido.
El examen se aprueba si se resuelven correctamente por lo menos dos ejercicios y se alcanza 4 puntos sin redondear la nota.

1) ¿Es cierto que existe un polinomio $K(x)$ tal que $x^7 - 3x^5 + 6x^2 - 3 = K(x)\,.\,(x^4 - 4x^2 + 2)$? Justifiquen la respuesta.

2) El resto de dividir $P(x) = x^5 + x^4 - 3x^2 - 3x - 2$ por $Q(x)$ es -11 ¿Puede ser $Q(x) = x - 4$ el divisor? Justifiquen la respuesta.

3) La función ingreso que genera cierto producto es $I(x) = (1200 - 3x).x$ donde **x** representa la cantidad de productos vendidos.

   Se pide:
   a) ¿Para qué cantidad de productos el ingreso es máximo?
   b) ¿Cuál es el importe de dicho ingreso?
   c) ¿Para qué cantidad de productos el valor del ingreso es de $112500?

4) Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim_{x\to 4}\left(\frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16}\right) =$

   b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x^2 - 3x + 4}{5x^2 + 7x - 1}\right) =$

5) Analizar la continuidad de la siguiente función en el punto señalado. Además clasificar la discontinuidad.

$$\mathcal{F}(x) = \frac{x - 2}{x^3 + x^2 - 6x} \quad en \quad x = 0$$

1) ¿Es cierto que existe un polinomio $K(x)$ tal que $x^7 - 3x^5 + 6x^2 - 3 = K(x) \,.\, (x^4 - 4x^2 + 2)$? Justifiquen la respuesta.

Primero vamos a nombrar a los polinomios:

$P(x) = x^7 - 3x^5 + 6x^2 - 3$

$Q(x) = x^4 - 4x^2 + 2$

Ahora despejamos $K(x)$

$$P(x) = K(x) \,.\, Q(x) \quad \rightarrow \quad K(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Esto se cumple si $Q(x)$ es divisor de $P(x)$. Para que esto sea cierto el resto de la división deberá ser 0.

Vamos a realizar la división completando donde haga falta:

$$\begin{array}{cccccccc|ccccc}
x^7 & +0x^6 & -3x^5 & +0x^4 & +0x^3 & +6x^2 & +0x & -3 & x^4 & +0x^3 & -4x^2 & +0x & +2 \\ \cline{9-13}
-x^7 & +0x^6 & +4x^5 & +0x^4 & -2x^3 & & & & x^3 & +\,x & & & \\ \cline{1-5}
0 & +0 & +x^5 & +0x^4 & -2x^3 & +6x^2 & +0x & & & & & & \\
 & & -\,x^5 & +0x^4 & +4x^3 & +0x^2 & -2x & & & & & & \\ \cline{3-7}
 & & 0 & +0 & +2x^3 & +6x^2 & -2x & -3 & Resto\ \neq 0 & & & &
\end{array}$$

Respuesta: No existe $K(x)$ ya que el resto de la división es distinto de 0.

2) El resto de dividir $P(x) = x^5 + x^4 - 3x^2 - 3x - 2$ por $Q(x)$ es -11 ¿Puede ser $Q(x) = x - 4$ el divisor? Justifiquen la respuesta.

Para saber si $Q(x)$ es el divisor, simplemente hacemos la división (estando atentos al resto)

La primera opción es usar Ruffini:

Recordemos que podemos usar Ruffini porque el divisor es de la forma $\boxed{x - a}$

	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	Para guiarnos aquí coloqué los grados originales.
	1	1	0	-3	-3	-2	
4		4	20	80	308	1220	
	1	5	20	77	305	1218	Resto
	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0		Recuerden que luego de la división se baja un grado al polinomio.

El resultado de la división es $x^4 + 5x^3 + 20x^2 + 77x + 305$ con resto 1218

Esto me daría como resultado que el resto de dividir $\boxed{P(x)}$ por $\boxed{Q(x) = x - 4}$ es distinto de $\boxed{-11}$

Otra alternativa sería hacer la división tradicional:

$$
\begin{array}{rrrrrrrl|l}
x^5 & +x^4 & +0x^3 & -3x^2 & -3x & -2 & & & x \quad -4 \\
\cline{9-9}
-x^5 & +4x^4 & & & & & & & x^4 \quad +5x^3 \quad +20x^2 \quad +77x \quad +305 \\
\cline{1-2}
0 & +5x^4 & +0x^3 & & & & & & \\
 & -5x^4 & +20x^3 & & & & & & \\
\cline{2-3}
 & 0 & +20x^3 & -3x^2 & & & & & \\
 & & -20x^3 & +80x^2 & & & & & \\
\cline{3-4}
 & & 0 & +77x^2 & -3x & & & & \\
 & & & -77x^2 & +308x & & & & \\
\cline{4-5}
 & & & 0 & +305x & -2 & & & \\
 & & & & -305x & +1220 & & & \\
\cline{5-6}
 & & & & 0 & +1218 & resto \neq -11 & & \\
\end{array}
$$

Ahora falta lo más importante, responder:

Respuesta: $Q(x) = x - 4$ no es posible divisor de $P(x)$ si buscamos que el resto sea -11

3) La función ingreso que genera cierto producto es $I(x) = (1200 - 3x).x$ donde **x** representa la cantidad de productos vendidos.

Se pide:

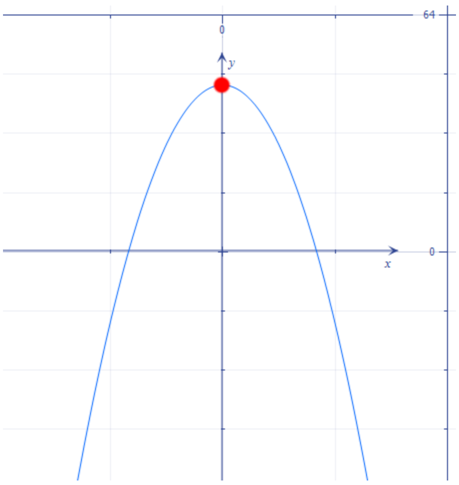
a) ¿Para qué cantidad de productos el ingreso es máximo?

Aquí tendremos que refrescar lo que vimos en el curso de ingreso de función cuadrática.

Para responder esta pregunta lo que nos va a interesar es el vértice.

Como nos pide un máximo (Máximo Ingreso en este caso) la parábola va a tener que ser convexa, o sea, sus ramas o brazos apuntan hacia abajo. Si apuntaran hacia arriba, la función tendría un mínimo y no un máximo.

La forma genérica sería así:



Lo que nos va a interesar es el vértice (en el gráfico es el punto rojo).

Recuerden que la concavidad de la parábola está dada por el coeficiente principal de la cuadrática. Si $\boxed{a > 0 \ \cup \text{ ramas arriba}}$ $\boxed{a < 0 \ \cap \text{ ramas abajo}}$

Refrescando un poco:

Polinómica	Factorizada	Canónica
$Y = \boldsymbol{a}x^2 + \boldsymbol{b}x + \boldsymbol{c}$	$Y = \boldsymbol{a}(x - \boldsymbol{x_1}).(x - \boldsymbol{x_2})$	$Y = \boldsymbol{a}(x - \boldsymbol{x_v})^2 + \boldsymbol{y_v}$

Para que las ramas apunten hacia abajo el coeficiente $\boldsymbol{a}$ debe ser negativo

Aquí es donde se pone interesante el ejercicio:

$I(x) = (1200 - 3x).x$

Podríamos distribuir y pasarlo a forma polinómica de la siguiente manera:

$I(x) = (1200 - 3x).x \rightarrow I(x) = 1200x - 3x^2$ ordenado sería $\boldsymbol{I(x) = -3x^2 + 1200x}$

Claramente se ve como el coeficiente principal es -3, o sea, sus ramas irán hacia abajo.

De esta manera podríamos buscar el vértice de manera polinómica y resolver el ejercicio.

Nosotros a esta altura ya deberíamos poder resolver el ejercicio en cualquiera de las otras dos formas.

Lo que observará el docente a la hora de evaluar será:

> *"La originalidad de la respuesta en tanto ésta revela la forma en que el alumno organiza los conceptos puestos en juego en la misma."*

Entonces, estará esperando que lo resolvamos tal cual nos lo dio, sin pasarlo a forma polinómica.

Pero, ¿En qué forma está expresado?

$I(x) = (1200 - 3x).x$ aunque no lo parezca a simple vista es de la forma $Y = \boldsymbol{a}(x - \boldsymbol{x_1}).(x - \boldsymbol{x_2})$ **FACTORIZADA**

$I(x) = 1.(-3x + 1200).(x - \boldsymbol{x_2})$ Ya va tomando forma de a poco. Podemos notar que $\boldsymbol{x_2 = 0}$

Saquemos factor común (-3) dentro del primer paréntesis:

$(-3x + 1200) = -3.(x - 400)$

Reemplazamos:

$I(x) = -3.(x - 400).(x - \boldsymbol{x_2})$ Ahora si tiene la forma factorizada que nos es familiar.

$I(x) = -3x.(x - 400)$ Esta expresión es equivalente a la anterior (saque $\boldsymbol{x_2 = 0}$)

Tenemos coeficiente principal -3, eso indica que las ramas apuntan hacia abajo como necesitábamos.

También tenemos $\boldsymbol{x_1 = 400 \text{ y } x_2 = 0}$ por lo tanto, tenemos las dos raíces de la parábola.

Ahora necesitamos averiguar $\boldsymbol{x_v}$:

Refresquemos otra vez los conocimientos:

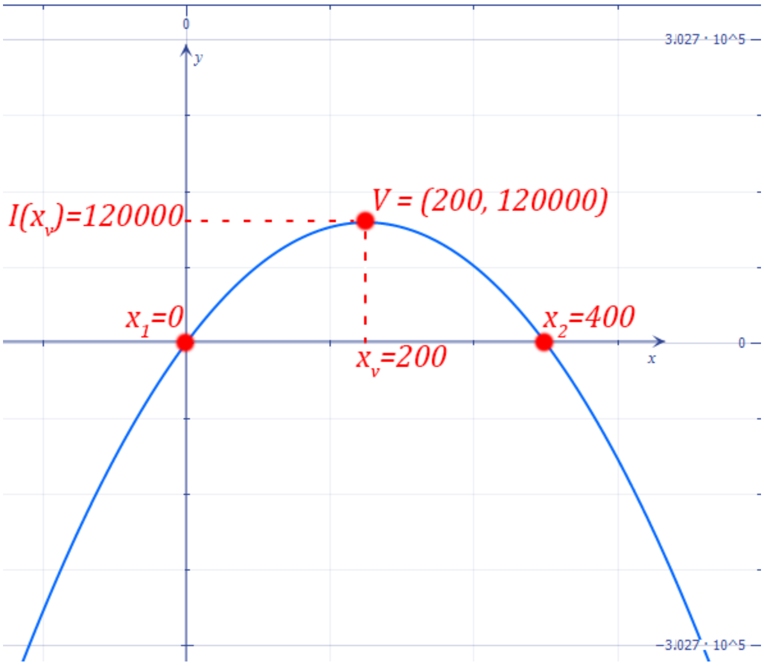
Polinómica	Factorizada
$\boldsymbol{x_v = \frac{-b}{2a}}$	$\boldsymbol{x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}}$

$\boldsymbol{x_v = \frac{400+0}{2} = 200}$ evaluando la función en $\boldsymbol{x_v}$ obtenemos el ingreso máximo.

$\boldsymbol{I(x_v)} = -3x_v.(x_v - 400) \rightarrow \boldsymbol{I(200)} = -3\,.\,\mathbf{200}.(\mathbf{200} - 400) = -600\,.\,(-200) = \mathbf{120000}$

$$\boldsymbol{v} = (x_v, I_{(x_v)}) = (\mathbf{200}, \mathbf{120000})$$

Tal vez la gráfica nos ayude a entender un poco más:



En el eje X tenemos la cantidad de productos vendidos, en el eje Y tenemos el ingreso en función de esa cantidad.

Gráficamente resulta fácil encontrar el Ingreso máximo: está en el Vértice.

Ahora estamos en condiciones de responder a la pregunta

Respuesta: El ingreso es máximo al vender 200 productos.

b) ¿Cuál es el importe de dicho ingreso?

La segunda componente del vértice nos da la solución.

Respuesta: El importe del ingreso máximo es de **$120000** (en realidad no nos da unidad monetaria, así que no podemos afirmar que sean pesos, a no ser que nos adelantemos y leamos la pregunta c)

c) ¿Para qué cantidad de productos el valor del ingreso es de $112500?

Como es una cuadrática vamos a encontrar 2 soluciones (esperemos que sean reales)

$I(x) = -3x.(x - 400) \rightarrow \$112500 = -3x.(x - 400)$

Despejamos x:

$112500 = -3x.(x - 400)$

$\frac{112500}{-3} = x.(x - 400)$

$-37500 = x^2 - 400x \rightarrow \boldsymbol{x^2 - 400x + 37500 = 0}$

Llego la hora de usar la resolvente:

$1.x^2 - 400x + 37500$ reemplazamos abajo:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{400 \pm \sqrt{(-400)^2 - 4\,.\,1\,.\,37500}}{2\,.\,1} = \frac{400 \pm \sqrt{160000 - 150000}}{2} = \frac{400 \pm \sqrt{10000}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{400 \pm 100}{2}$$

$$x_1 = \frac{400 + 100}{2} = \frac{500}{2} = 250$$

$$x_2 = \frac{400 - 100}{2} = \frac{300}{2} = 150$$

Ahora solo nos queda responder.

<u>**Respuesta:**</u> Se alcanza un ingreso de **$112500** cuando se venden **150** o **250** unidades

4) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 4} \left(\frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16} \right) =$

Primero vamos a ver qué pasa en cálculos auxiliares si reemplazamos directamente x:

<u>**CA:**</u>

$$\frac{4^2 - 8.4 + 16}{4^2 - 16} = \frac{16 - 32 + 16}{16 - 16} = \frac{0}{0}$$

Nos queda una indeterminación de $\frac{0}{0}$ que, como ya sabemos, se puede salvar.

Aquí hay que tener bien fresco el factoreo de polinomios.

Podemos factorearlo de diferentes maneras.

Arranquemos con el numerador:

<u>Trinomio Cuadrado Perfecto</u>

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

$$x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2.4.x + 4^2 = (x-4)^2$$

De esta manera ya tengo factorizado el numerador.

Ruffini

$x =\ 4$ es raíz de ambos polinomios (numerador y denominador), ya que cuando reemplace se hizo 0 arriba y abajo.

$(x^2\ -\ 8x\ +\ 16) : (x-4)$

	x^2	x^1	x^0
	1	-8	16
4		4	-16
	1	-4	$\boxed{0}$
	x^1	x^0	

Resto = 0 Si hubiese dado otra cosa, algo hicimos mal.
Nos queda como cociente: $1.x^1 - 4x^0$, o sea, $x-4$

Esto quedaría de la siguiente manera

$(x-4).(x-4) =\ (x-4)^2$

Nos quedó igual que en el caso anterior de factoreo.

Nos queda ver el denominador:

$x^2 - 16$

Podríamos usar Ruffini otra vez, pero en este caso, para hacer más rápido, voy a optar por:

Diferencia de cuadrados

$a^2 - b^2 = (a+b).(a-b)$

$x^2 - 16 =\ x^2 - 4^2\ =\ (x+\ 4).(x-\ 4)$

Ya tenemos numerador y denominador factoreados:

$\frac{(x-4)^2}{(x+4).(x-4)} = \frac{(x-4)}{(x+4)}$ Simplifico el $(x\ -\ 4)^2$ con el $(x\ -\ 4)$

$\lim_{x\to 4}\left(\frac{x-4}{x+4}\right) = \frac{0}{8} = 0$ **CA:** $\frac{4-4}{4+4} = \frac{0}{8}$

La respuesta sería:

$\lim_{x\to 4}\left(\frac{x-4}{x+\ 4}\right) = 0$

b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x^2-3x+4}{5x^2+7x-1}\right)=$

Primero vamos a ver qué pasa en cálculos auxiliares si reemplazamos directamente x:

CA:

$$\frac{2.0^2-3.0+4}{5.0^2+7.0-1}=\frac{0-0+4}{0+0-1}=\frac{4}{-1}=-4$$

No nos queda una indeterminación, el límite existe, entonces, procedemos a responder:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x^2-3x+4}{5x^2+7x-1}\right)=-4$$

5) Analizar la continuidad de la siguiente función en el punto señalado. Además clasificar la discontinuidad.

$$\mathcal{F}(x)=\frac{x-2}{x^3+x^2-6x}\quad en\quad x=0$$

Lo primero que vamos a hacer es definir el dominio de la función:

En este caso, el problema estará cuando el denominador se haga 0, entonces, ¿Para que valores de x eso sucede?

Como es un polinomio de grado 3, vamos a tener 3 raíces en total (Reales + Complejas)

$x^3+x^2-6x=x.(x^2+x-6)$ entonces $x.(x^2+x-6)=0$

Ahora tenemos que encontrar las raíces.

$x.(x^2+x-6)=0$ Esto se cumple cuando uno de los dos factores es 0.

Es decir, $x=0$ o $(x^2+x-6)=0$ por lo tanto ya tenemos una raíz $\boxed{x=0}$

Ahora tenemos que encontrar las otras dos raíces, que, como podemos ver, se encuentran en la cuadrática

$$1.x^2+1.x-6=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4.1.(-6)}}{2.1}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}$$

$x_1=\frac{-1+5}{2}=\frac{4}{2}=2$ por otro lado tenemos $x_2=\frac{-1-5}{2}=\frac{-6}{2}=-3$

Ya con las tres raíces podemos definir el Dominio de la función $\boxed{x=0}$ $\boxed{x=2}$ $\boxed{x=-3}$

$$\mathrm{Dom}\mathcal{F}=\mathbb{R}-\{-3,0,2\}$$

Primero vamos a ver qué pasa en cálculos auxiliares si reemplazamos directamente x:

$$\mathcal{F}(x) = \frac{x - 2}{x^3 + x^2 - 6x} \quad en \quad x = 0$$

CA:

$$\frac{0 - 2}{0^3 + 0^2 - 6.0} = \frac{-2}{0}$$

Ya sabemos que $\mathcal{F}(0)$ no existe, porque 0 no pertenece al dominio.

Si planteamos el líminte.

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-2}{x^3+x^2-6x}\right) = \frac{-2}{0}$ Esto no es una indeterminación que podamos salvar.

De hecho, vamos a mostrar que el límite no existe.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x - 2}{x^3 + x^2 - 6x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x - 2}{x^3 + x^2 - 6x}\right) = -\infty$$

$x \to 0^-$		$x \to 0^+$	
x	$\mathcal{F}(x)$	x	$\mathcal{F}(x)$
-1	-0.5	1	
-0.5	-0.8	0.5	0.57
-0.25	-1.45	0.25	1.23
-0.125	-2,78	0.125	2.56
-0.01	-33.4	0.01	33.22

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x - 2}{x^3 + x^2 - 6x}\right) \neq \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x - 2}{x^3 + x^2 - 6x}\right)$$

Como el límite tendiendo a cero por derecha es distinto al límite tendiendo a 0 por izquierda, podemos decir que el límite no existe.

Si quisieran seguir analizando la función, se van a encontrar con que en $x = 0$ hay una asíntota vertical.

Respuesta: La función no es continua en el punto $x = 0$. No existe la función y tampoco existe el límite, la función es **discontinua esencial**.