Análisis Cualitativo

Actividad 1

Los científicos Verhulst (1938) y Peral (1930) propusierón el siguiente modelo de crecimiento de una población $P(t)$ que vive en un medio de recursos limitados (alimento , espacio etc. ...)

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \quad \text{con} \quad P(0) = P_0 \quad \text{y } r > 0\,;K > 0$$

(K es llamada la capacidad de carga del ambiente)
(r es la tasa de crecimiento natural).

1. Determine los puntos de equilibrio y clasifíquelos.

2. Calcule $\lim\limits_{t \to \infty} P(t)$

3. Analice gráficamente $P(t)$ en los siguientes casos:

   a) cuando $P_0 > K$ b) cuando $P_0 < K$

4. Resuelva $\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$ mediante la sustitución: $u = p^{-1}$

Actividad 2

Suponga que se combina una sustancia A con una sustancia B para formar sustancias C, si $x(t)$ representa la cantidad C formada en el tiempo t y si α y β son las cantidades iniciales de las sustancias A y B respectivamente. Entonces la velocidad con que se forma el nuevo compuesto C se puede describir con la ecuación diferencial autónoma: $x' = k(\alpha - x)(\beta - x)$. Donde k es una constante de proporcionalidad, y $\beta > \alpha > 0$.

a) Clasifique los puntos críticos.

b) Para el caso $\alpha = \beta$ ¿cuál es el comportamiento de $x(t)$ cuando $t \longrightarrow \infty$ si $x(0) < \alpha$?

c) Verifique que $x(t) = \alpha - \frac{1}{t+c}$, es una solución explícita de la ecuación diferencial para $k = 1$ y $\alpha = \beta$. Determine una solución que satisfaga $x(0) = \frac{\alpha}{2}$. Grafique esta solución. ¿Concuerda esto con los resultados del ítem b)?

Actividad 3

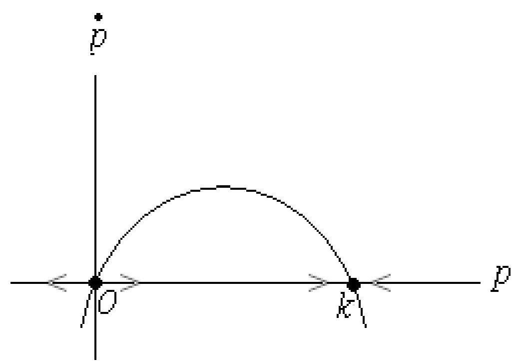
Analice cualitativamente la ecuación indicando y clasificando puntos de equilibrio. Grafique las soluciones de la ecuación diferencial, que modela un problema de incremento de la producción $y(t)$, donde C y B son constantes tales que $C > B$:

$$\frac{dy}{dt} = (1 - y)(C - By)$$

Resolución

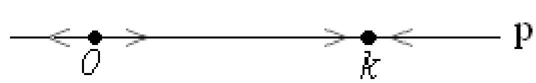
Actividad 1

1. $\frac{dP}{dt} = 0 \;\Leftrightarrow\; p = 0 \;\vee\; p = k$



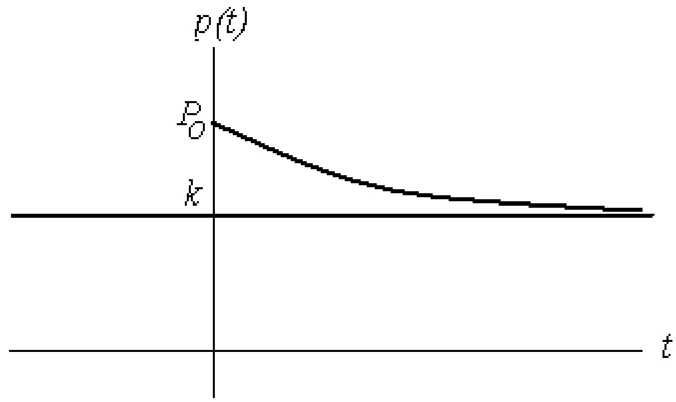
$p = 0$ es repulsor

$p = k$ es atractor

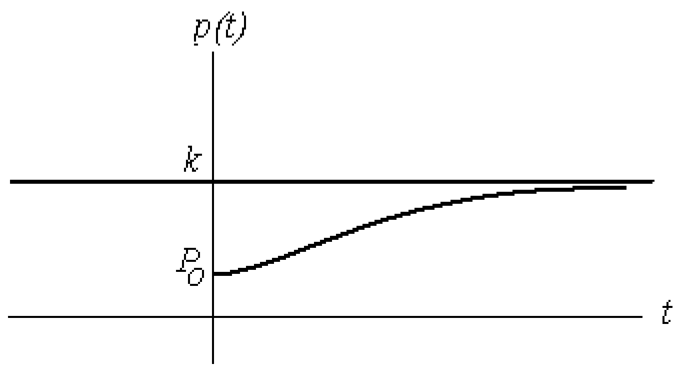


2. como $p = k$ es atractor, entonces $\lim_{t \to \infty} p(t) = k$

3. a)



b)



4. $p' - rp = -\frac{rp^2}{k}$

sea $\quad u = p^{-1}$

$\quad\quad\; u' = -p^{-2}p'$

$p' - rp = -\frac{rp^2}{k} \quad / \cdot -p^{-2}$

$-p^{-2}p' + rp^{-1} = \frac{r}{k} \;\; *$

reemplazando en $*$

$u' + ru = \frac{r}{k}$ lineal

$u = (c + \int \frac{r}{k} e^{\int r dt} dt) e^{-\int r dt}$

$u = ce^{-rt} + \frac{1}{k}$

$p = \frac{1}{u}$

$p = \frac{1}{ce^{-rt}+\frac{1}{k}}$

$p(0) = p_0$

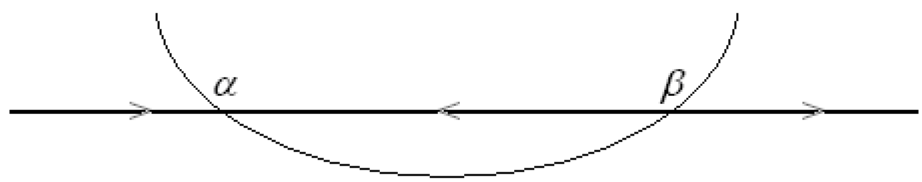
$p_0 = \frac{1}{c+\frac{1}{k}}$

$c = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{k}$

$p(t) = \frac{1}{(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{k})e^{-rt}+\frac{1}{k}}$

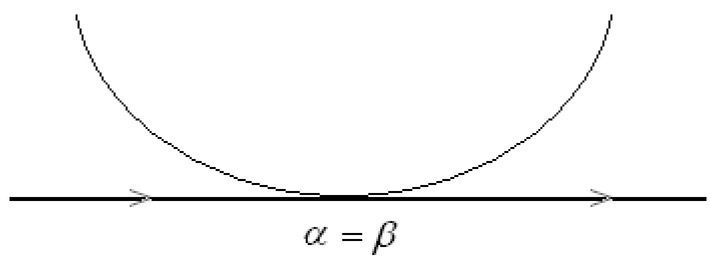
Actividad 2

a) Los puntos críticos se obtienen resolviendo la ecuación $k(\alpha - x)(\beta - x) = 0 \Rightarrow x = \alpha$, $x = \beta$



α es atractor y β es repulsor

b) Si $0 < x(0) < \beta$, entonces $x(t) \longrightarrow \alpha$ cuando $t \longrightarrow \infty$.

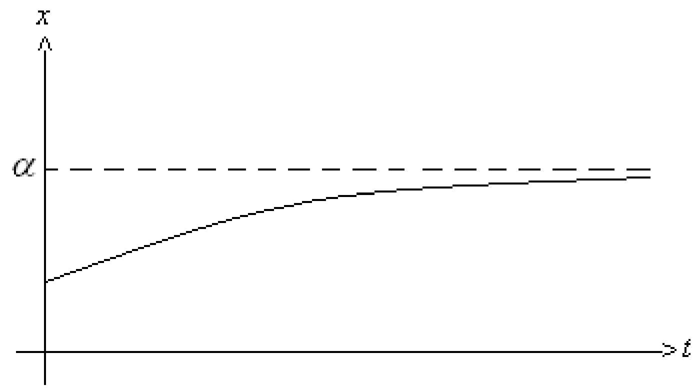


α es atractor-repulsor.

c) Por derivación directa se comprueba que

$x'(t) = \frac{1}{(t+c)^2} = \left(\alpha - \left(\alpha - \frac{1}{t+c}\right)\right)^2$ es solución. Usando la condición inicial, se tiene la solución

$x(t) = \alpha - \frac{\alpha}{\alpha t+2}$



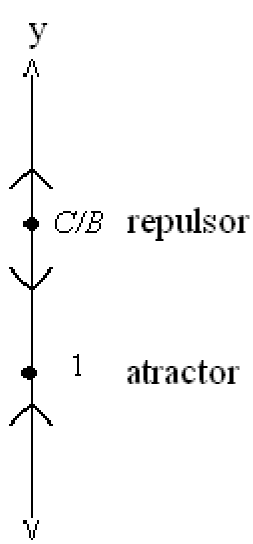
El comportamiento, para tiempo suficientemente grande, de $x(t)$ cuando $x(0) = \frac{\alpha}{2}$, se obtiene

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\alpha - \frac{\alpha}{\alpha t+2}\right) = \alpha$$

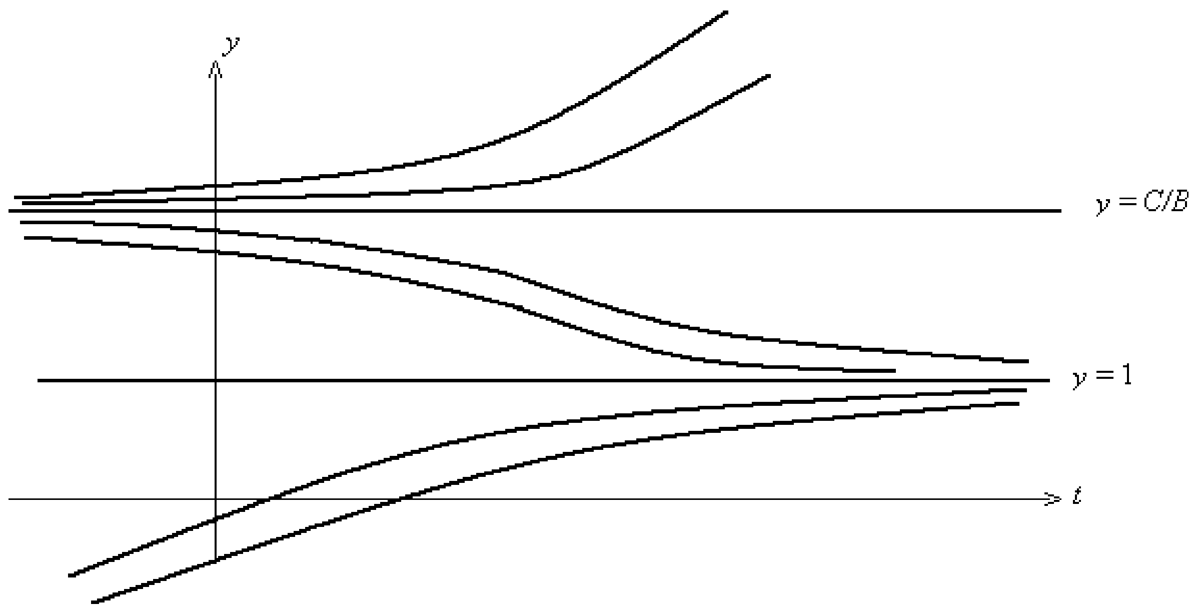
Por lo tanto el resultado concuerda con lo obtenido a través de la línea de fase en el ítem b).

Actividad 3

puntos de equilibrio $\frac{C}{B}$ y 1 con $\frac{C}{B} > 1$



Gráfica de las soluciones


y
$y = C/B$
$y = 1$
t