Capítulo 1

El Plano Euclidiano

1.1 La Geometría Griega

En el principio, la geometría era una colección de reglas de uso común para medir y construir casas y ciudades. Fue hasta el año 300 AC que Euclides de Alejandría, en sus *Elementos*, ordena y escribe todo ese saber, imprimiéndole el sello de rigor lógico que caracteriza y distingue a las matemáticas. Se da cuenta de que todo razonamiento riguroso (o *demostración*) debe basarse sobre ciertos principios previamente establecidos ya sea, a su vez, por demostración o bien por convención. Pero a final de cuentas, este método conduce a la necesidad ineludible de convenir en que ciertos principios básicos (*postulados* o *axiomas*) son válidos sin necesidad de demostrarlos, que están dados y son incontrovertibles para poder construir sobre ellos el resto de la teoría. Lo que hoy se conoce como Geometría Euclidiana, y hasta hace dos siglos simplemente como Geometría, está basada sobre los cinco postulados de Euclides:

I Por cualesquiera dos puntos, se puede trazar el segmento de recta que los une.

II Dados un punto y una distancia, se puede trazar el círculo de centro el punto y radio la distancia.

III Un segmento de recta, se puede extender en ambas direcciones indefinidamente.

IV Todos los ángulos rectos son iguales.

V Dadas dos rectas y una tercera que las corta, si los ángulos internos de un lado suman menos de dos ángulos rectos, entonces las dos rectas se cortan y lo hacen de ese lado.

Obsérvese que en estos postulados se describe el comportamiento y la relación entre ciertos elementos básicos de la geometría, como son "punto", "trazar", "segmento", "distancia", etc. De alguna manera, se le dá la vuelta a su definición haciendo uso de

la noción intuitiva que se tiene de ellos y haciendo explicitas ciertas relaciones básicas que deben cumplir.

De estos postulados o axiomas, el quinto es el más famoso pues se creía que podría deducirse de los otros. Es más sofisticado, y entonces se pensó que debía ser un *Teorema*, es decir, ser demostrable. De hecho, un problema muy famoso fué ese: demostrar el quinto postulado usando unicamente a los otros cuatro. Y muchísimas generaciones de matemáticos lo atacaron sin exito. No es sino hasta el siglo XIX, y para la sorpresa de todos, que se demuestra que no se puede demostrar; que efectivamente hay que suponerlo como axioma, pues negaciones de él dan origen a "nuevas geometrías", tan lógicas y bien fundamentadas como la euclidiana. Pero esta historia se vera más adelante (en los Capítulos 6 y 8) pues por el momento nos interesa introducir a la geometría analítica.

La publicación de la "*Geometrie*" de Descartes (1596–1650) marca una revolución en las matemáticas. La introducción del álgebra a la solución de problemas de índole geométrico desarrolló una nueva intuición y con ésta, un nuevo entender de la naturaleza de las "*Linges Courves*".

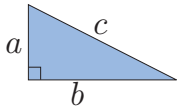
Para comprender lo que hizo Descartes, se debe tener más familiaridad con el quinto postulado. Además del enunciado original, hay otras dos versiones que son equivalentes:

V.a (**El Quinto**) Dada una línea recta y un punto fuera de ella, existe una única recta que pasa por el punto y que es paralela a la línea.

V.b Los ángulos interiores de un triángulo suman dos ángulos rectos.

De las tres versiones que hemos dado del quinto postulado de Euclides, usaremos a lo largo de este libro a la **V.a**, a la cual nos referiremos simplemente como "*El Quinto*".

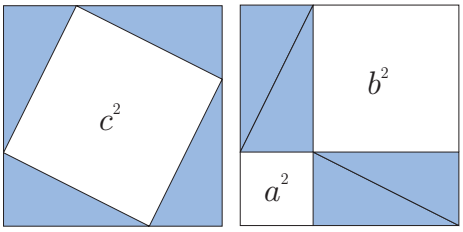
Antes de entrar de lleno a la Geometría Analítica demostremos, a manera de homenaje a los griegos y con sus métodos, uno de sus teoremas más famosos e importantes.



Teorema 1.1.1 ***(Pitágoras)***. *Dado un triángulo rectángulo, si los lados que se encuentran en un ángulo recto (llamados* catetos*) miden a y b, y el tercero (la* hipotenusa*) mide c, entonces*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Demostración. Considérese un cuadrado de lado $a + b$, y colóquense en él cuatro copias del triángulo de dos maneras diferentes como en la figura. Las areas que quedan fuera son iguales. □



Aunque la demostración anterior (hay otras) parece no usar nada, queda implicito el uso del quinto postulado; pues, por ejemplo, en el primer cuadrado, que el cuadradito interno de lado c tenga ángulo recto usa su versión **V.b**. Además, hace uso de nuevos conceptos como son el área y cómo calcularla; en fin, hace uso de nuestra intuición geométrica, que debemos creer y fomentar. Pero vayamos a lo nuestro.

---

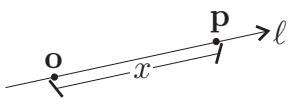
*EJERCICIO 1.1 Demostrar la equivalencia de **V**, **V.a** y **V.b**. Aunque no muy formalmente (como en nuestra demostración de Pitágoras), convencerse con dibujos de que tienen todo que ver entre ellos.

EJERCICIO 1.2 Demuestra el Teorema de Pitágoras ajustando (sin que se traslapen) cuatro copias del triángulo en un cuadrado de lado c y usando que $(b-a)^2 = b^2-2ab+a^2$, (estamos suponiendo que $a < b$, como en la figura anterior).

1.2 Puntos y parejas de números

Para reinterpretar el razonamiento que hizo Descartes, supongamos por un momento que conocemos bien al *Plano Euclidiano* definido por los cinco axiomas de los Elementos; es el conjunto de puntos que se extiende indefinidamente a semejanza de un pizarrón, un papel, un piso o una pared y viene acompañado de nociones como rectas y distancia, entre otras; y en el cual se pueden demostrar teoremas como el de Pitágoras. Denotaremos por $\mathbb{E}^2$ a este plano; en este caso el exponente 2 se refiere a la dimensión y no es exponenciación (no es "$\mathbb{E}$ al cuadrado", sino que debe leerse "$\mathbb{E}$ dos"). Da la idea de que puede haber espacios euclidianos de cualquier dimensión $\mathbb{E}^n$ (léase "$\mathbb{E}$ ene"), aunque sería complicado definirlos axiomáticamente. De hecho los definiremos pero de una manera más simple que es usando coordenadas: la idea genial de Descartes. Podríamos ahora, apoyados en el lenguaje moderno de los conjuntos, recrear su razonamiento como sigue.

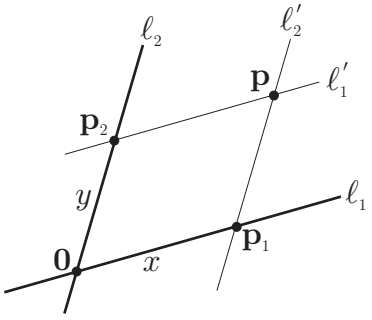
El primer paso es notar que los puntos de una recta $\ell \subset \mathbb{E}^2$ corresponden biunivocamente a los *números reales*, que se denotan por $\mathbb{R}$. Escogemos un punto $\mathbf{o} \in \ell$ que se llamará el *origen* y que corresponderá al número cero. El origen parte a la recta en dos mitades; a una de ellas se le asocian los números positivos de acuerdo a su distancia al origen, y a la otra mitad los números negativos. Así, a cada número real x se le asocia un punto $\mathbf{p}$ en ℓ, y a cada punto en ℓ le corresponde un número real.



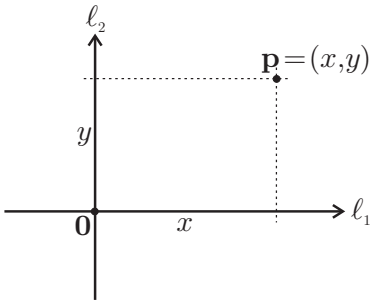
De esta identificación natural surge el nombre de "recta de los números reales" y todo el desarrollo ulterior de la Geometría Analítica, e inclusive del Cáculo. Los números tienen un significado geométrico (los griegos lo sabían bien al entenderlos

como distancias), y entonces problemas geométricos (y físicos) pueden atacarse y entenderse manipulando números.

El segundo paso para identificar los puntos del plano euclidiano con parejas de números hace uso esencial del quinto postulado. Tómense dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 en el plano $\mathbb{E}^2$ que se intersecten en un punto $\mathbf{o}$ que será el *origen*. Orientamos las rectas para que sus puntos correspondan a números reales como arriba. Entonces a cualquier punto $\mathbf{p} \in \mathbb{E}^2$ se le puede hacer corresponder una pareja de números de la siguiente forma.

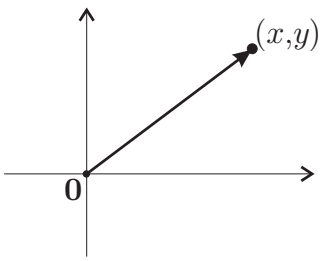


Por el Quinto, existe una única recta ℓ_1' que pasa por $\mathbf{p}$ y es paralela a ℓ_1; y análogamente, existe una única recta ℓ_2' que pasa por $\mathbf{p}$ y es paralela a ℓ_2. Las intersecciones $\ell_1 \cap \ell_2'$ y $\ell_2 \cap \ell_1'$ determinan los puntos $\mathbf{p}_1 \in \ell_1$ y $\mathbf{p}_2 \in \ell_2$, respectivamente, y por tanto, determinan dos números reales x y y; es decir, una pareja ordenada (x, y). Y al revés, dada la pareja de números (x, y), tómense $\mathbf{p}_1$ como el punto que está sobre ℓ_1 a distancia x de $\mathbf{o}$, y $\mathbf{p}_2$ como el punto que está sobre ℓ_2 a distancia y de $\mathbf{o}$ (tomando en cuenta signos, por supuesto). Sea ℓ_1' la recta que pasa por $\mathbf{p}_2$ paralela a ℓ_1 y sea ℓ_2' la recta que pasa por $\mathbf{p}_1$ paralela a ℓ_2 (¡acabamos de usar de nuevo al Quinto!). La intersección $\ell_1' \cap \ell_2'$ es el punto $\mathbf{p}$ que corresponde a la pareja (x, y).



La generalidad con que hicimos el razonamiento anterior fué para hacer explicito el uso del quinto postulado en el razonamiento clásico de Descartes, pero no conviene dejarlo tan ambiguo. Es costumbre tomar a las rectas ℓ_1 y ℓ_2 ortogonales: a ℓ_1 horizontal con su dirección positiva a la derecha (como vamos leyendo), conocida tradicionalmente como el *eje de las* x; y a ℓ_2 vertical con dirección positiva hacia arriba, el famoso *eje de las* y. No sólo por costumbre se utiliza esta convención, sino que simplifica el álgebra asociada a la geometría clásica. Por ejemplo, permitirá usar el teorema de Pitágoras para calcular facilmente las distancias a partir de las coordenadas. Pero esto se verá más adelante.

En resumen, al fijar los ejes coordenados, a cada pareja de números (x, y) le corresponde un punto $\mathbf{p} \in \mathbb{E}^2$, pero iremos más allá y los identificaremos diciendo $\mathbf{p} = (x, y)$. Además, se le puede hacer corresponder la flechita (segmento de recta dirigido llamado *vector*) que 'nace' en el origen y termina en el punto. Así, las siguientes interpretaciones son equivalentes y se usarán de manera indistinta a lo largo de todo el libro.



a. Un punto en el plano.

b. Una pareja de números reales.

c. Un vector que va del origen al punto.

Nótese que si bien en este texto las palabras *punto* y *vector* son equivalentes,

tienen diferentes conotaciones. Mientras que un punto es pensado como un lugar (una posición) en el espacio, un vector es pensado como un segmento de línea dirigido de un punto a otro.

El conjunto de todas las parejas ordenadas de números se denota por $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En este caso el exponente 2 sí se refiere a exponenciación, pero de conjuntos, lo que se conoce ahora como el *Producto Cartesiano* en honor de Descartes (véase el Apéndice); aunque la usanza común es leerlo "$\mathbb{R}$ dos".

1.2.1 Geometría Analítica

La idea genialmente simple $\mathbb{R}^2 = \mathbb{E}^2$ (es decir, las parejas de números reales se identifican naturalmente con los puntos del plano euclidiano) logra que converjan las aguas del álgebra y la geometría. A partir de Descartes se abre la posibilidad de reconstruir la geometría de los griegos sobre la base de nuestra intuición númerica (básicamente la de sumar y multiplicar). Y a su vez, la luz de la geometría baña con significados y problemas al álgebra. Se hermanan, se apoyan, se entrelazan: nace la geometría analítica.

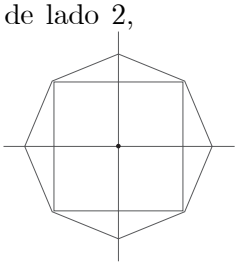
De aquí en adelante, salvo en contadas ocaciones donde sea inevitable y como comentarios, abandonaremos la linea del desarrollo histórico. De hecho, nuestro tratamiento algebráico está muy lejos del original de Descartes, pues usa ideas desarrolladas en el Siglo XIX. Pero antes de entrar de lleno a él, vale la pena enfatizar que no estamos abandonando el método axiomático iniciado por Euclides, simplemente cambiaremos de conjunto de axiomas: ahora nos basaremos en los axiomas de los números reales (ver la Observación que sigue al Teorema 1.3.1). De tal manera que los objetos primarios de Euclides (línea, segmento, distancia, ángulo, etc.) serán definiciones (por ejemplo, *punto* ya es "pareja ordenada de números" y *plano* es el conjunto de todos los puntos), y los cinco postulados serán teoremas que hay que demostrar. Nuestros objetos primarios básicos serán ahora los números reales y nuestra intuición geométrica primordial es que forman una recta: La Recta Real, $\mathbb{R}$. Sin embargo, la motivación básica para las definiciones sigue siendo la intuición geométrica desarrollada por los griegos. No queremos hacernos los occisos como si no conocieramos a la geometría griega; simplemente la llevaremos a nuevos horizontes con el apoyo del álgebra —el enfoque analítico— y para ello tendremos que reconstruirla.

EJERCICIO 1.3 Encuentra diferentes puntos en el plano dados por sus coordenadas (por ejemplo, el $(3, 2)$, el $(-1, 5)$, el $(0, -4)$, el $(-1, -2)$„ el $(1/2, -3/2)$).

EJERCICIO 1.4 Identifica los *cuadrantes* donde las parejas tienen signos determinados.

EJERCICIO 1.5 ¿Cúales son las coordenadas de los vértices de un cuadrado de lado 2, centrado en el origen y con lados paralelos a los ejes?

EJERCICIO 1.6 ¿Cúales son las coordenadas de los vértices del octágono regular que incluye como vertices a los del cuadrado anterior? (*Tienes que usar al Teorema de Pitágoras.*)

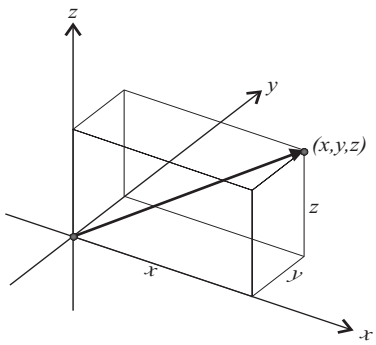


EJERCICIO 1.7 ¿Puedes dar las coordenadas de los vértices de un triángulo equilatero centrado en el origen? Dibújalo. (*Usa de nuevo al Teorema de Pitágoras, en un triángulo rectángulo con hipotenusa* 2 *y un cateto* 1).

1.2.2 El espacio de dimensión n

La posibilidad de extender con paso firme la geometría euclidiana a más de dos dimensiones es una de las aportaciones de mayor profundidad del método cartesiano.

Aunque nos hayamos puesto formales en la sección anterior para demostrar una correspondencia natural entre $\mathbb{E}^2$ y $\mathbb{R}^2$, intuitivamente es muy simple. Al fijar los dos ejes coordenados —las dos direcciones preferidas— se llega de manera inequivoca a cualquier punto en el plano dando las distancias que hay que recorrer en esas direcciones para llegar a él. En el espacio, habrá que fijar tres ejes coordenadas y dar tres numeritos. Los dos primeros dan un punto en el plano (que podemos pensar horizontal, como el piso), y el tercero nos da la altura (que puede ser positiva o negativa). Si denotamos por $\mathbb{R}^3$ al conjunto de todas las ternas (x, y, z) de números reales, como estas corresponden a puntos en el espacio una vez que se fijan los tres ejes, podemos definir al espacio euclidiano de tres dimensiones como $\mathbb{R}^3$, sin preocuparnos de axiomas. ¿Y porqué pararse en 3? ¿o en 4?



Dado un número natural $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$, denotamos por $\mathbb{R}^n$ al conjunto de todas las n-adas (léase "eneadas") ordenadas de números reales $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Formalmente,

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\} \ .$$

Para valores pequeños de n, se pueden usar letras x, y, z e inclusive w para denotar las coordenadas; pero para n general esto es imposible y no nos queda más que usar los subindices. Asi, tenemos un conjunto bien definido, $\mathbb{R}^n$, al que podemos llamar "*espacio euclidiano de dimensión* n", y hacer geometría en él. A una n-ada $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se le llama *vector* o *punto*.

El estudiante que se sienta incómodo con esto de muchas dimensiones, puede sustituir (pensar en) un 2 o un 3 siempre que se se use n y referirse al plano o al espacio tridimensional que habitamos para su intuición. No pretendemos en este libro estudiar la geometría de estos espacios de muchas dimensiones. Nos concentraremos en dimensiones 2 y 3, así que puede pensarse a la n como algo que puede tomar valores 2 o 3 y que resulta muy útil para hablar de los dos al mismo tiempo pero en singular. Sin embargo, es importante que el estudiante tenga una visión amplia y pueda preguntarse en cada momento ¿qué pasaría en 4 o más dimensiones? Como verá, y a veces señalaremos explicitamente, algunas cosas son muy fáciles de generalizar, y

otras no tanto. Por el momento, baste con volver a enfatizar el amplísimo mundo que abre el método de las coordenadas cartesianas para las matemáticas y la ciencia.

Vale la pena en este momento puntualizar las convenciones de notación que utilizaremos en este libro. A los números reales los denotamos por letras simples, por ejemplo x, y, z, o bien a, b y c o bien t, r y s; e inclusive conviene a veces utilizar letras griegas, α "alfa", β "beta" y γ "gama", o λ "lambda" y μ "mu" (por alguna razón hemos hecho costumbre de utilizarlas siempre en pequeñas familias). Por su parte, a los puntos o vectores los denotamos por letras en negritas, por ejemplo, $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ para enfatizar que estamos pensando en su caracter de puntos, o bien, usamos $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ o $\mathbf{d}$ (acrónimo elegante que usaremos para "dirección") y $\mathbf{n}$ (acrónimo para "normal") para subrayar su papel vectorial. Por supuesto, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ siempre son buenos comodines para vectores (puntos o eneadas) variables o incógnitos, que no hay que confundir con x, y, z, variables reales o numéricas.

1.3 El Espacio Vectorial $\mathbb{R}^2$

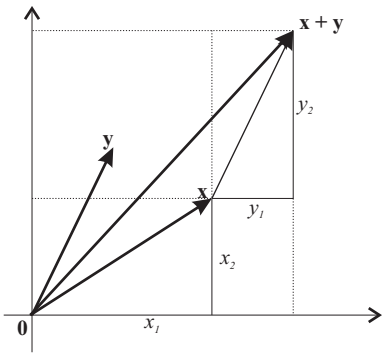
En esta sección se introduce la herramienta algebráica básica para hacer geometría con parejas, ternas o n-adas de números. Y de nuevo la idea central es muy simple: así como los números se pueden sumar y multiplicar, también los vectores tienen sus operacioncitas. Lo único que suponemos de los números reales es que sabemos, o mejor aún, que "saben ellos" sumarse y multiplicarse; y en base a ello extenderemos estas nociones a vectores.

Definición 1.3.1 Dados dos vectores $\mathbf{u} = (x, y)$ y $\mathbf{v} = (x', y')$ en $\mathbb{R}^2$, definimos su *suma vectorial*, o simplemente su *suma*, como el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ que resulta de sumar coordenada a coordenada:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} := (x + x', y + y') \ ,$$

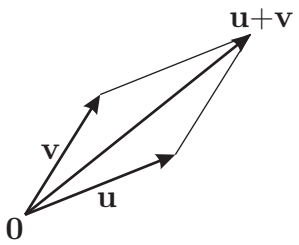
es decir,

$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y') \ .$$



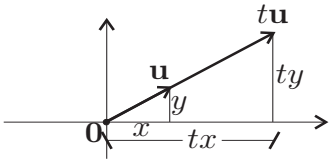
Nótese que en cada coordenada, la suma que se usa es la suma usual de números reales. Así que al signo "+" de suma le hemos ampliado el espectro de "saber sumar números" a "saber sumar vectores"; pero con una receta muy simple: "coordenada a coordenada". Por ejemplo,

$$(3, 2) + (-1, 1) = (2, 3) \ .$$



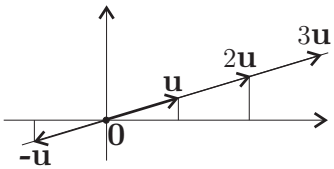
La suma vectorial corresponde geométricamente a la regla del paralelogramo usada para encontrar la resultante de dos vectores. Esto es, se piensa a los vectores como segmentos dirigidos que salen del origen, generan entonces un paralelogramo, y el vector que va del origen a la otra esquina es la suma. También se puede pensar como la acción de dibujar un vector tras otro, pensando que los vectores son segmentos dirigidos que pueden moverse paralelos a si mismos.

Definición 1.3.2 Dados un vector $\mathbf{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ y un número $t \in \mathbb{R}$ se define la *multiplicación escalar* $t\,\mathbf{u}$ como el vector que resulta de multiplicar cada coordenada del vector por el número:



$$t\,\mathbf{u} := (t\,x, t\,y)\ .$$

Nótese que en cada coordenada, la multiplicación que se usa es la de los números reales.



La multiplicación escalar corresponde a la dilatación, contracción y/o posiblemente al cambio de dirección de un vector. Veamos. Es claro que

$$2\mathbf{u} = (2x, 2y) = (x + x, y + y) = \mathbf{u} + \mathbf{u}\,,$$

así que $2\mathbf{u}$ es el vector "$\mathbf{u}$ seguido de $\mathbf{u}$" o bien, "$\mathbf{u}$ dilatado a su doble". De la misma manera que $3\mathbf{u}$ es un vector que apunta en la misma dirección pero de tres veces su tamaño. O bien, es fácil deducir que $(\frac{1}{2})\mathbf{u}$, como punto, esta justo a la mitad del camino del origen $\mathbf{0} = (0, 0)$ a $\mathbf{u}$. Así que $t\,\mathbf{u}$ para $t > 1$ es, estrictamente hablando, una *dilatación* de $\mathbf{u}$, y para $0 < t < 1$ una contracción del mismo. Por último, para $t < 0$, $t\,\mathbf{u}$ apunta en la dirección contraria ya que, en particular, $(-1)\mathbf{u} =: -\mathbf{u}$ es el vector que, como segmento dirigido, va del punto $\mathbf{u}$ al $\mathbf{0}$ (puesto que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$) y el resto se obtiene como dilataciones o contracciones de $-\mathbf{u}$.

No está de más insistir en una diferencia escencial entre las dos operaciones que hemos definido. Si bien, la suma vectorial es una operación que de dos ejemplares de la misma especie (vectores) nos da otro de ellos; la multiplicación escalar involucra a dos objetos de diferente índole, por un lado al "escalar", un número real, y por el otro a un vector, dando como resultado un nuevo vector. Los vectores no se multiplican (por el momento), solo los escalares (los números reales) saben multiplicarlos (pegarles, podría decirse) y les cambián con ello su "escala".

EJERCICIO 1.8 Sean $\mathbf{v}_1 = (2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (3, -1)$ y $\mathbf{v}_4 = (1, -4)$.
i).- Calcula y dibuja: $2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2$; $2(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4) - \mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4$; $2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4$.
ii).- ¿Qué vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ cumple que $2\mathbf{v}_1 + \mathbf{x} = \mathbf{3}\mathbf{v}_2; 3\mathbf{v}_3 - 2\mathbf{x} = \mathbf{v}_4 + \mathbf{x}$?
iii).- ¿Puedes encontrar $r, s \in \mathbb{R}$ tales que $r\,\mathbf{v}_2 + s\,\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_4$?

EJERCICIO 1.9 Dibuja el origen y tres vectores cualesquiera $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en un papel. Con un par de escuadras encuentra los vectores $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ y $\mathbf{w}+\mathbf{u}$.

EJERCICIO 1.10 Dibuja el origen y dos vectores cualesquiera $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ en un papel. Con regla (escuadras) y compás, encuentra los puntos $(1/2)\,\mathbf{u}+(1/2)\,\mathbf{v}$, $2\mathbf{u}-\mathbf{v}$, $3\mathbf{u}-2\mathbf{v}$, $2\mathbf{v}-\mathbf{u}$. ¿Resultan colineales?

EJERCICIO 1.11 Describe el *lugar geométrico* definido por $\mathcal{L}_{\mathbf{v}} := \{t\,\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Estas definiciones se extienden a $\mathbb{R}^n$ de manera natural. Dados dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$ y un número real $t \in \mathbb{R}$, defínanse la *suma vectorial* (o simplemente la *suma*) y el *producto escalar* como sigue

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} := (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)\ ,$$

$$t\,\mathbf{x} := (t\,x_1, \ldots, t\,x_n)\ .$$

Es decir, la suma de dos vectores (con el mismo número de coordenadas) se obtiene sumando coordenada a coordenada y el producto por un escalar (un número) se obtiene multiplicando a cada coordenada por ese número.

Las propiedades básicas de la suma vectorial y la multiplicación escalar se reunen en el siguiente teorema, donde el vector $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ es llamado *vector cero* que corresponde al *origen*; y, para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, el vector $-\mathbf{x} := (-1)\mathbf{x}$ se llama *inverso aditivo* de $\mathbf{x}$.

Teorema 1.3.1 *Para todos los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ y para todos los números $s, t \in \mathbb{R}$ se cumple que:*

i) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$
ii) $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$
iii) $\mathbf{x}+\mathbf{0} = \mathbf{x}$
iv) $\mathbf{x}+(-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
v) $s(t\,\mathbf{x}) = (st)\mathbf{x}$
vi) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$
vii) $t\,(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = t\,\mathbf{x}+t\,\mathbf{y}$
viii) $(s+t)\,\mathbf{x} = s\,\mathbf{x}+t\,\mathbf{x}$

1.3.1 ¿Teorema o Axiomas?

Antes de pensar en demostrar el teorema anterior, vale la pena reflexionar un poco sobre su carácter pues está muy cerca de ser un conjunto de axiomas y es sútil qué quiere decir eso de demostrarlo.

Primero, debemos observar que $\mathbb{R}^n$ tiene sentido para $n = 1$, es simplemente una manera rimbombante de referirse a los números reales. Así que del Teorema anterior,

siendo $n = 1$ (es decir, si $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ estan en $\mathbb{R}$) se obtienen parte de los *axiomas de los números reales*. Esto es, cada enunciado es una de las reglas elementales de la suma y la multiplicación que conocemos desde chiquitos. Del **(i)** al **(iv)** son los axiomas que hacen a $\mathbb{R}$ con la operación suma lo que se conoce como un "*grupo conmutativo*" : **(i)** dice que la suma es "*asociativa*", **(ii)** que es "*conmutativa*", **(iii)** que el **0** —o bien, el 0— es su "*neutro*" (aditivo) y **(iv)** que todo elemento tiene "*inverso*" (aditivo). Por su parte, **(v)** y **(vi)** nos dicen que la multiplicación es asociativa y que tiene un neutro (multiplicativo), el 1; pero nos faltaría que es conmutativa y que tiene inversos (multiplicativos). Entonces tendríamos que añadir:

ix) $t\,s = s\,t$
x) Si $t \neq 0$, existe t^{-1} tal que $t\,t^{-1} = 1$

para obtener que $\mathbb{R} - \{0\}$ (los reales quitándole el 0) son un grupo conmutativo con la multiplicación. Finalmente, **(vii)** y **(viii)** ya dicen lo mismo (en virtud de **(ix)**), que las dos operaciones se *distribuyen*.

Obsérvese que en el caso general ($n > 1$) **(ix)** y **(x)** ni siquiera tienen sentido; pues sólo cuando $n = 1$ la multiplicación escalar involucra a seres de la misma especie. En resumen, para el caso $n = 1$, el teorema es un subconjuto de los axiomas que definen las operaciones de los números reales. No hay nada que demostrar, pues son parte de los axiomas básicos que vamos a usar. El resto de los axiomas que definen los números reales se refieren a su orden y, para que el libro quede autocontenido, de una vez los enunciamos. Los números reales tienen una *relación de orden*, denotada $\leq$ y que se lee "*menor o igual que*" que cumple, para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con:

Oi) $a \leq b$ o $b \leq a$ (es un orden total)
Oii) $a \leq b$ y $b \leq a \Leftrightarrow a = b$
Oiii) $a \leq b$ y $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (es transitivo)
Oiv) $a \leq b$ y $c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$
Ov) $a \leq b$ y $0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$

Además, los reales cumplen con el *axioma del supremo* que intuitivamente dice que la recta numérica no tiene "hoyos", que forman un continuo. Pero este axioma, fundamental para el cálculo pues hace posible formalizar lo "infinitesimal" no se usa en este libro, así que ahí lo dejamos.

Regresando al Teorema 1.3.1, para $n > 1$ la cosa es sutilmente diferente. Nosotros definimos la suma vectorial, y al ser algo nuevo sí tenemos que verificar que cumple las propiedades requeridas. Vale la pena introducir a **Dios**, el usado en matemáticas no el de las religiones, para que quede claro. Dios nos dá los números reales con la suma y la multiplicación, de alguna manera nos "ilumina" y ¡puff!: ahí están, con todo y sus axiomas. Ahora, nosotros —simples mortales— osamos definir la suma vectorial y la multiplicación de escalares a vectores, pero Dios ya no nos asegura nada, él ya hizo su chamba: nos toca demostrarlo a nosotros.

Demostración. (del Teorema1.3.1) Formalmente solo nos interesa demostrar el teorema para $n = 2, 3$, pero escencialmente es lo mismo para cualquier n. La demostración de cada inciso es muy simple, tanto así que hasta confunde, consiste en aplicar el axioma correspondiente que cumplen los números reales coordenada a coordenada y la definición de las operaciones involucradas. Sería muy tedioso, y aportaría muy poco al lector, demostrar los ocho incisos, así que sólo demostraremos con detalle el primero para $\mathbb{R}^2$, dejando los demas y el caso general como ejercicio.

i). Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$, entonces $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ y $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$, donde cada x_i, y_i y z_i $(i = 1, 2)$ son números reales (nótese que conviene usar subindices con la misma letra que en negritas denota al vector). Tenemos entonces de la definición de suma vectorial que

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2) + (z_1,\, z_2)$$

y usando nuevamente la definición se obtiene que esta última expresión es

$$= ((x_1 + y_1) + z_1,\, (x_2 + y_2) + z_2)\ .$$

Luego, como *la suma de números reales es asociativa* (el axioma correspondiente de los números reales usado coordenada a coordenada) se sigue

$$= (x_1 + (y_1 + z_1),\, x_2 + (y_2 + z_2))\ .$$

Y finalmente, usando dos veces la definición de suma vectorial, se obtiene

$$\begin{aligned} &= (x_1,\, x_2) + (y_1 + z_1,\, y_2 + z_2) \\ &= (x_1,\, x_2) + ((y_1,\, y_2) + (z_1,\, z_2)) \\ &= \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \end{aligned}$$

lo que demuestra que $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$; y entonces tiene sentido escribir $\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}$. □

Se conoce como *espacio vectorial* a un conjunto en el que están definidas dos operaciones (suma vectorial y multiplicación escalar) que cumplen con las ocho propiedades del Teorema 1.3.1. De tal manera que este teorema puede parafrasearse "$\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial". ¿Podría el lector mencionar un espacio vectorial distinto de $\mathbb{R}^n$?

EJERCICIO 1.12 Usando los axiomas de los números reales, asi como las definiciones de suma vectorial y producto escalar, demuestra algunos incisos del Teorema 1 para el caso $n = 2$ y $n = 3$. ¿Verdad que lo único que cambia es la longitud de los vectores, pero los argumentos son exactamente los mismos? Demuestra (aunque sea mentalmente) el caso general.

EJERCICIO 1.13 Demuestra que si $a \leq 0$ entonces $0 \leq -a$. (Usa el axioma (**Oiv**))

EJERCICIO 1.14 Observa que los axiomas de orden no dicen nada sobre cómo estan relacionados el 0 y el 1, pero se puede deducir de ellos. Supon que $1 \leq 0$, usando el ejercicio anterior y los axiomas **(Ov)** y **(Oii)**, demuestra que entonces $-1 = 0$; como esto no es cierto se debe cumplir la otra posibilidad por **(Oi)**, es decir, que $0 \leq 1$.

EJERCICIO 1.15 Demuestra que si $a \leq b$ y $c \leq 0$ entonces $ac \geq bc$ (donde $\geq$ es *mayor o igual*).

Ejemplo. Como corolario de este teorema se tiene que el "algebrita" simple a la que estamos acostumbrados con números también vale con vectores. Por ejemplo, en el ejercicio (1.8.ii.b) se pedía encontrar el vector $\mathbf{x}$ tal que

$$3\mathbf{v}_3 - 2\mathbf{x} = \mathbf{v}_4 + \mathbf{x}$$

Hagámoslo. Se vale pasar con signo menos del otro lado de la ecuación (sumando el inverso aditivo a ambos lados), y por tanto esta ecuación equivale a

$$-3\mathbf{x} = \mathbf{v}_4 - 3\mathbf{v}_3$$

y multiplicando por $-1/3$ se obtiene que

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}_3 - (1/3)\mathbf{v}_4.$$

Ya nada más falta substituir por los valores dados. Es probable que el estudiante haya hecho algo similar y qué bueno: tenía la intuición correcta. Pero hay que tener cuidado, asi como con los números no se vale dividir entre cero, no se le vaya a ocurrir tratar de ¡dividir por un vector! Aunque a veces se pueden "cancelar" (ver Ej. 1.3.1). Para tal efecto, el siguiente Lema será muy usado y vale la pena verlo en detalle.

Lema 1.3.1 *Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ y $t \in \mathbb{R}$ son tales que $t\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ entonces $t = 0$ o $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

Demostración. Suponiendo que $t \neq 0$, hay que demostrar que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para completar el lema. Pero entonces t tiene inverso multiplicativo y podemos multiplicar por t^{-1} ambos lados de la ecuación $t\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para obtener (usando **(v)** y **(vi)**) que $\mathbf{x} = (t^{-1})\ \mathbf{0} = \mathbf{0}$ por la definición del vector nulo $\mathbf{0} = (0, 0)$. □

EJERCICIO 1.16 Demuestra que si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ y $t \in \mathbb{R}$ son tales que $t\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ entonces $t = 0$ o $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. ¿Y para $\mathbb{R}^n$?

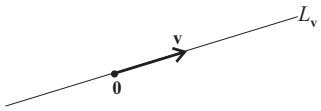
EJERCICIO 1.17 Demuestra que si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es distinto de $\mathbf{0}$, y $t, s \in \mathbb{R}$ son tales que $t\,\mathbf{x} = s\,\mathbf{x}$, entonces $t = s$**.** (Es decir, si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ se vale "cancelarlo" aunque sea vector.)

1.4 Líneas rectas

En el estudio de la geometría clásica, las rectas son subconjuntos básicos descritos por los axiomas; se les reconoce intuitivamente y se parte de ellas para construir lo demás. Con el método cartesiano, esto no es necesario. Las líneas se pueden definir o construir, correspondiendo a nuestra noción intuitiva de ellas —que no varía en nada de la de los griegos—, para despues ver que efectivamente cumplen con los axiomas que antes se les asociaban. En esta sección, definiremos las rectas y veremos que cumplen los axiomas primero y tercero de Euclides.

Nuestra definición de recta estará basada en la intuición física de una partícula viajando en movimiento rectilíneo uniforme; es decir, con velocidad fija y en la misma dirección. Estas dos nociones (velocidad como magnitud y dirección) se han amalgamado en el concepto de vector.

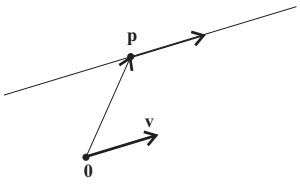
Recordemos que en el ejercicio 1.3, se pide describir al conjunto $\mathcal{L}_{\mathbf{v}} := \{t\,\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$ donde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Debía ser claro que si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}$, al constar de todos los múltiplos escalares del vector $\mathbf{v}$, se dibuja como una recta que pasa por el origen (pues $\mathbf{0} = 0\,\mathbf{v}$) con la dirección de $\mathbf{v}$. Si pensamos a la variable t como el tiempo, la función $\varphi(t) = t\,\mathbf{v}$ describe el movimiento rectilineo uniforme de una particula que viene desde tiempo infinito negativo, pasa por el orígen $\mathbf{0}$ en el tiempo $t = 0$ (llamada la posición inicial), y seguira por siempre con velocidad constante $\mathbf{v}$.



Pero por el momento queremos pensar a las rectas como conjuntos (en el capítulo siguiente estudiaremos más a profundidad las funciones). Los conjuntos $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}$, al rotar $\mathbf{v}$, nos dan las rectas por el orígen, y para obtener otras, bastara "empujarlas" fuera del origen (o bien, arrancar el movimiento con otra posición inicial).

Definición 1.4.1 Dados un punto $\mathbf{p}$ y un vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, la *recta que pasa por* $\mathbf{p}$ con dirección $\mathbf{v}$ es el conjunto:

$$\ell := \{\mathbf{p} + t\,\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\}. \tag{1.1}$$



Una *recta* o *línea* en $\mathbb{R}^2$ es un subconjunto que tiene, para algún $\mathbf{p}$ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, la descripción anterior.

A esta forma de definir una recta se le conoce como *representación paramétrica*. Esta representación trae consigo una función entre los números reales y la recta:

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ \varphi(t) &= \mathbf{p} + t\,\mathbf{v} \end{aligned} \tag{1.2}$$

De hecho, esta función define una biyección entre $\mathbb{R}$ y ℓ. Como ℓ se definio por medio del *parametro* $t \in \mathbb{R}$, es claro que es la imagen de la función φ; es decir, φ es sobre. Demostremos (aunque de la intuición física parezca obvio) que es uno-a-uno.

Supongamos para esto que $\varphi(t) = \varphi(s)$ para algunos $t, s \in \mathbb{R}$ y habrá que concluir que $t = s$. Por la definición de φ se tiene

$$\mathbf{p} + t\,\mathbf{v} = \mathbf{p} + s\,\mathbf{v}$$

De aquí, sumando el inverso del lado izquierdo a ambos (que equivale a pasarlo de un lado al otro con signo contrario) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{p} + s\,\mathbf{v} - (\mathbf{p} + t\,\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{p} + s\,\mathbf{v} - \mathbf{p} - t\,\mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{p} - \mathbf{p}) + (s\,\mathbf{v} - t\,\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{0} + (s - t)\mathbf{v} \\ &= (s - t)\,\mathbf{v} \end{aligned}$$

donde hemos usado las propiedades **(i), (ii), (iii), (iv)** y **(viii)** del Teorema 1.3.1.[1] Del Lema 1.3.1, se concluye que $s - t = 0$ o bien que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Pero por hipótesis $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ (esto es la escencia), asi que no queda otra que $s = t$. Esto demuestra que φ es inyectiva; que nuestra intuición se corrobora.

Hemos demostrado que cualquier recta está en biyección natural con $\mathbb{R}$, la recta modelo, así que todas las líneas son una "copia" de la recta real abstracta $\mathbb{R}$.

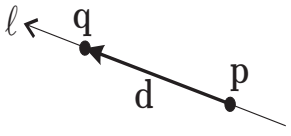
Observación 1.4.1 En la definición anterior, asi como en la demostración, no se usa de manera escencial que $\mathbf{p}$ y $\mathbf{v}$ esten en $\mathbb{R}^2$. Solo se usa que hay una suma vectorial y un producto escalar bien definidos. Asi que el punto y el vector podrían estar en $\mathbb{R}^3$ o en $\mathbb{R}^n$. Podemos entonces dar por establecida la noción de recta en cualquier dimensión al cambiar 2 por n en la Definición 1.4.

Observación 1.4.2 A la función 1.2 se le conoce como "*movimiento rectilíneo uniforme*" o "*movimiento inercial*", pues, como decíamos al principio de la sección, describe la manera en que se mueve una partícula, o un cuerpo, que no está afectada por ninguna fuerza y tiene posición $\mathbf{p}$ y vector velocidad $\mathbf{v}$ en el tiempo $t = 0$.

Ya podemos demostrar un resultado clásico, e intuitivamente claro.

Lema 1.4.1 *Dados dos puntos* $\mathbf{p}$ *y* $\mathbf{q}$ *en* $\mathbb{R}^n$*, existe una recta que pasa por ellos.*

Demostración. Si tuvieramos que $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, como hay muchas rectas que pasan por $\mathbf{p}$, ya acabamos. Supongamos entonces que $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$, que es el caso interesante. Si tomamos como punto base para la recta que buscamos a $\mathbf{p}$, bastará encontrar un vector que nos lleve de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$, para tomarlo como dirección. Este es la diferencia $\mathbf{q} - \mathbf{p}$, pues claramente



$$\mathbf{p} + (\mathbf{q} - \mathbf{p}) = \mathbf{q}\,,$$

[1] Esta es la última vez que haremos mensión explicita del uso del Teorema 1.3.1, de aquí en adelante se aplicaran sus propiedades como si fueran lo más natural del mundo. Pero vale la pena que el estudiante se cuestione por algún tiempo qué es lo que se esta usando en las manipulaciones algebráicas.

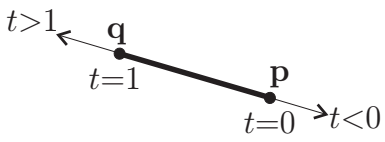
de tal manera que si definimos $\mathbf{d} := \mathbf{q} - \mathbf{p}$, como dirección, la recta

$$\ell = \{\mathbf{p} + t\,\mathbf{d} \mid t \in \mathbb{R}\},$$

(que sí es una recta pues $\mathbf{d} = \mathbf{q} - \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$), es la que funciona. Con $t = 0$ obtenemos que $\mathbf{p} \in \ell$, y con $t = 1$ que $\mathbf{q} \in \ell$. □

De la demostración del lema, se siguen los postulados I y III de Euclides. Obsérvese que cuando t toma valores de entre 0 y 1, se obtienen puntos entre $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ (pues el vector direccional $(\mathbf{q} - \mathbf{p})$ se encoge al multiplicarlo por t), asi que el *segmento* de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$, que denotaremos por $\overline{\mathbf{pq}}$, se debe definir como

$$\overline{\mathbf{pq}} := \{\mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \mid 0 \leq t \leq 1\}.$$

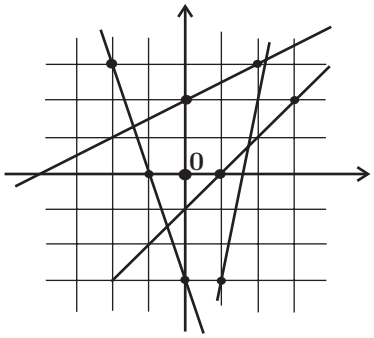


Y la recta ℓ que pasa por $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$, se extiende "indefinidamente" a ambos lados del segmento $\overline{\mathbf{pq}}$; para $t > 1$ del lado de $\mathbf{q}$ y para $t < 0$ del lado de $\mathbf{p}$.

---

*EJERCICIO 1.18 Aunque lo demostraremos más adelante, es un buen ejercicio demostrar formalmente en este momento que la recta ℓ, cuando $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$, es única.

EJERCICIO 1.19 Encuentra representaciones paramétricas de las rectas en la figura. Observa que su representación paramétrica no es única.



EJERCICIO 1.20 Dibuja las rectas

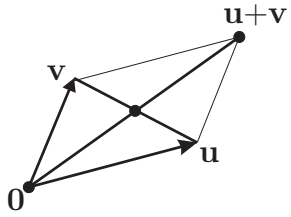
$$\begin{aligned} \{(2,3) + t(1,1) &\mid t \in \mathbb{R}\};\\ \{(-1,0) + s(2,1) &\mid s \in \mathbb{R}\};\\ \{(0,-2) + (-r,2r) &\mid r \in \mathbb{R}\};\\ \{(t-1,-2t) &\mid t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

EJERCICIO 1.21 Exhibe representaciones paramétricas para las 6 rectas que pasan por dos de los siguientes puntos en $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{p}_1 = (2,4)$, $\mathbf{p}_2 = (-1,2)$, $\mathbf{p}_3 = (-1,-1)$ y $\mathbf{p}_4 = (3,-1)$.

EJERCICIO 1.22 Exhibe representaciones paramétricas para las 3 rectas que genera el triángulo en $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{q}_1 = (2,1,2)$, $\mathbf{q}_2 = (-1,1,-1)$, $\mathbf{q}_3 = (-1,-2,-1)$.

EJERCICIO 1.23 Si una partícula viaja de $2\mathbf{q}_1$ a $3\mathbf{q}_3$ en movimiento inercial y tarda 4 unidades de tiempo en llegar. ¿Cuál es su vector velocidad?

EJERCICIO 1.24 Dados dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$, el *paralelogramo* que definen tiene como vértices a los puntos $\mathbf{0}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (como en la figura). Demuestra que sus *diagonales*, es decir, los segmentos de $\mathbf{0}$ a $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y de $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ se intersectan en su punto medio.



1.4.1 Coordenadas Baricéntricas

Todavía podemos exprimirle más información a la demostración del Lema 1.4.1. Veremos cómo se escriben, en términos de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$, los puntos de su recta, y que esto tiene que ver con la clásica ley de las palancas. Además, de aquí surgirá una demostración muy simple del Teorema clásico de concurrencia de medianas en un triángulo.

Supongamos que $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ son dos puntos distintos del plano. Para cualquier $t \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p}) &= \mathbf{p} + t\,\mathbf{q} - t\,\mathbf{p} \\ &= (1-t)\mathbf{p} + t\,\mathbf{q} \end{aligned}$$

al reagrupar los términos. Y esta última expresión, a su vez, se puede reescribir como

$$s\,\mathbf{p} + t\,\mathbf{q} \quad \text{con} \quad s + t = 1\,,$$

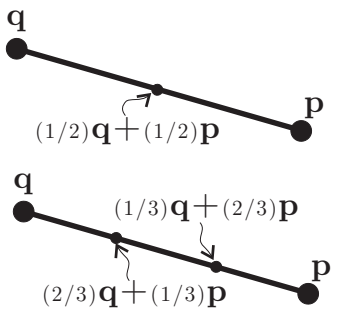
donde hemos introducido la nueva variable $s = 1 - t$. De lo anterior se deduce que la recta ℓ que pasa por $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ se puede también describir como

$$\ell = \{s\,\mathbf{p} + t\,\mathbf{q} \mid s + t = 1\}$$

A los números s, t (con $s + t = 1$, insistimos), se les conoce como *coordenadas baricéntricas* del punto $\mathbf{x} = s\,\mathbf{p} + t\,\mathbf{q}$ con respecto a $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$.

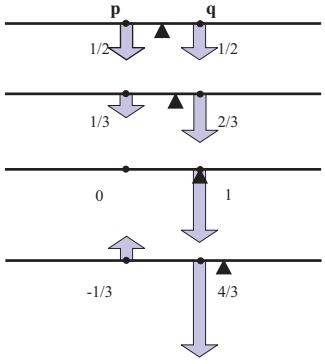
Las coordenadas baricéntricas tienen la ventaja de que ya no distinguen entre los dos puntos. Como lo escribiamos antes —solo con t— $\mathbf{p}$ era el punto base ("el que la hace de 0") y luego $\mathbf{q}$ era hacía donde ibamos ("el que la hace de 1"), jugaban un papel distinto. Ahora no hay preferencia hacia ninguno de los dos; las coordenadas baricéntricas son "democráticas". Más aún, al expresar una recta por sus coordenadas baricéntricas no le damos una dirección preferida. Se usan simultaneamente los parametros naturales para las dos direcciones (de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ y de $\mathbf{q}$ a $\mathbf{p}$); pues si $s + t = 1$ entonces

$$\begin{aligned} s\,\mathbf{p} + t\,\mathbf{q} &= \mathbf{p} + t\,(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \\ &= \mathbf{q} + s\,(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \end{aligned}$$



Nótese que $\mathbf{x} = s\,\mathbf{p} + t\,\mathbf{q}$ está en el segmento entre $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ si y sólo si sus dos coordenadas baricéntricas son no negativas, es decir, si y solo si $t \geq 0$ y $s \geq 0$. Por ejemplo, el punto medio tiene coordenadas baricéntricas $1/2, 1/2$, es $(1/2)\mathbf{p} + (1/2)\mathbf{q}$; y el punto que divide al segmento de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ en la proporción de 2/3 a 1/3 se escribe $(1/3)\mathbf{p} + (2/3)\mathbf{q}$, pues se acerca más a $\mathbf{q}$ que a $\mathbf{p}$. La extensión de la recta más allá de $\mathbf{q}$ tiene coordenadas baricéntricas s, t con $s < 0$ (y por lo tanto $t > 1$); asi que los puntos de ℓ fuera del segmento de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ tienen alguna coordenada baricéntrica negativa (la correspondiente al punto más lejano).

Físicamente, podemos pensar a la recta por $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ como una barra rígida. Si distribuimos una masa (que podemos pensar unitaria, es decir que vale 1) entre estos dos puntos, el punto de equilibrio tiene las coordenadas baricéntricas correspondientes a las masas. Si, por ejemplo, tienen el mismo peso, su punto de equilibrio está en el punto medio. Las masas negativas pueden pensarse como una fuerza hacia arriba y las correspondientes coordenadas baricéntricas nos dan entonces el punto de equilibrio para las palancas.



Veremos ahora un teorema clásico cuya demostración se simplifica enormemente usando coordenadas baricéntricas. Dado un triángulo con vértices $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, se definen las *medianas* como los segmentos que van de un vértice al punto medio del lado opuesto a éste.

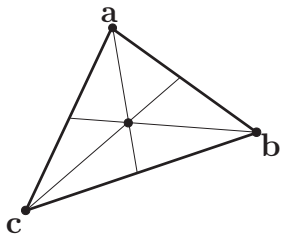
Teorema 1.4.1 *Dado un triángulo* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$*, sus tres medianas "concurren" en un punto que las parte en la proporción de* $2/3$ *(del vértice) a* $1/3$ *(del lado opuesto).*

Demostración. Como el punto medio del segmento $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ es $(\frac{1}{2}\,\mathbf{b} + \frac{1}{2}\,\mathbf{c})$, entonces la mediana por $\mathbf{a}$ es el segmento

$$\{s\,\mathbf{a} + t\,(\frac{1}{2}\,\mathbf{b} + \frac{1}{2}\,\mathbf{c}) \mid s + t = 1\,,\ s \geq 0\,,\ t \geq 0\},$$

y analogamente se describen las otras dos medianas. Por suerte, el enunciado del Teorema nos dice dónde buscar la intersección: el punto que describe en la mediana de $\mathbf{a}$ es precisamente

$$\frac{1}{3}\,\mathbf{a} + \frac{2}{3}\,(\frac{1}{2}\,\mathbf{b} + \frac{1}{2}\,\mathbf{c}) = \frac{1}{3}\,\mathbf{a} + \frac{1}{3}\,\mathbf{b} + \frac{1}{3}\,\mathbf{c}.$$



Entonces, de las igualdades

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\,\mathbf{a} + \frac{1}{3}\,\mathbf{b} + \frac{1}{3}\,\mathbf{c} &= \frac{1}{3}\,\mathbf{a} + \frac{2}{3}\,(\frac{1}{2}\,\mathbf{b} + \frac{1}{2}\,\mathbf{c}) \\
&= \frac{1}{3}\,\mathbf{b} + \frac{2}{3}\,(\frac{1}{2}\,\mathbf{c} + \frac{1}{2}\,\mathbf{a}) \\
&= \frac{1}{3}\,\mathbf{c} + \frac{2}{3}\,(\frac{1}{2}\,\mathbf{a} + \frac{1}{2}\,\mathbf{b})
\end{aligned}$$

se deduce que las tres medianas *concurren* en el punto $\frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$, es decir, pasan por él. Este punto es llamado el *baricentro* del triángulo, y claramente parte a las medianas en la proporción deseada. De nuevo, el baricentro corresponde al "centro de masa" o "punto de equilibrio" del triángulo. □

EJERCICIO 1.25 Si tienes una barra rígida de un metro y con una fuerza de $10kg$ quieres levantar una masa de $40kg$, ¿de dónde debes de colgar la masa, estando el punto de apoyo al extremo de tu barra? Haz un dibujo.

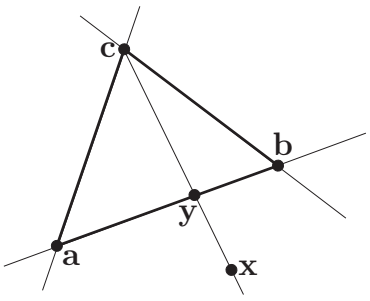
EJERCICIO 1.26 Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ tres puntos distintos entre sí. Demuestra que si $\mathbf{a}$ está en la recta que pasa por $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ entonces $\mathbf{b}$ está en la recta por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{c}$.

EJERCICIO 1.27 Encuentra el baricentro del triángulo $\mathbf{a} = (2, 4)$, $\mathbf{b} = (-1, 2)$, $\mathbf{c} = (-1, -1)$. Haz un dibujo.

EJERCICIO 1.28 Obérvese que en el teorema anterior, así como en la discución que le precede, nunca usamos que estuvieramos en el plano. ¿Podría el lector enunciar y demostrar el teorema análogo para tetraedros en el espacio? (Un tetraedro está determinado por cuatro puntos en el espacio tridimensional, ¿dónde estará su centro de masa?). ¿Puede generalizarlo a más dimensiones?

1.4.2 Planos en el espacio I

En la demostración del Teorema de las Medianas se uso una idea que podemos utilizar para definir planos en el espacio. Dados tres puntos $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ en $\mathbb{R}^3$ (aunque debe observar el lector que nuestra discusión se generaliza a $\mathbb{R}^n$), ya sabemos describir las tres lineas entre ellos, supongamos que son distintas. Entonces podemos tomar nuevos puntos en alguna de ellas y de estos puntos las nuevas lineas que los unen al vértice restante (como lo hicimos en el teorema del punto medio de un segmento al vértice opuesto). Es claro que la unión de todas estas líneas debe ser el plano por $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$; esta es la idea que vamos a desarrollar.



Un punto $\mathbf{y}$ en la línea por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se escribe como

$$\mathbf{y} = s\,\mathbf{a} + t\,\mathbf{b} \quad \text{con} \quad s + t = 1\ .$$

Y un punto $\mathbf{x}$ en la línea que pasa por $\mathbf{y}$ y $\mathbf{c}$ se escribe entonces como

$$\mathbf{x} = r\ (s\,\mathbf{a} + t\ \mathbf{b}) + (1 - r)\ \mathbf{c}\ ,$$

para algún $r \in \mathbb{R}$; que es lo mismo que

$$\mathbf{x} = (r\,s)\ \mathbf{a} + (r\,t)\ \mathbf{b} + (1 - r)\ \mathbf{c}\ .$$

Observemos que los tres coeficientes suman uno:

$$(r\,s)\ + (r\,t)\ + (1 - r)\ = r\,(\ s\ +\ t\,) + 1 - r = r\,(1) + 1 - r = 1\ .$$

Y lo mismo hubiera pasado si en lugar de haber empezado con $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, hubieramos empezado con otra de las parejas. La tirada entonces es que cualquier combinación de $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ con coeficientes que sumen uno debe estar en su plano. Demostraremos que está en una linea por uno de los vértices y un punto en la linea que pasa por los otros dos.

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Consideremos al punto

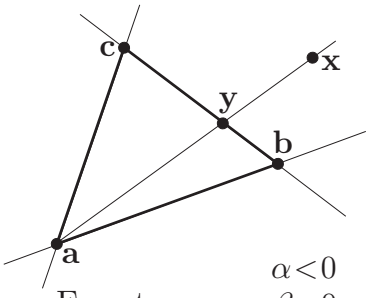
$$\mathbf{x} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}\ .$$

Como alguno de los coeficientes es distinto de 1 (si no, sumarían 3), podemos suponer sin perdida de generalidad (esto quiere decir que los otros dos casos son análogos) que $\alpha \neq 1$. Entonces podemos dividir por $1-\alpha$ y se tiene

$$\mathbf{x} = \alpha\,\mathbf{a} + (1-\alpha)\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\,\mathbf{b} + \frac{\gamma}{1-\alpha}\mathbf{c}\right),$$

asi que $\mathbf{x}$ está en la recta que pasa por $\mathbf{a}$ y el punto

$$\mathbf{y} = \frac{\beta}{1-\alpha}\,\mathbf{b} + \frac{\gamma}{1-\alpha}\mathbf{c}\ .$$



En este caso: $\alpha<0$, $\beta>0$, $\gamma>0$

Como $\alpha+\beta+\gamma = 1$, entonces $\beta+\gamma = 1-\alpha$, y los coeficientes de esta última expresión suman uno. Por lo tanto $\mathbf{y}$ esta en la recta que pasa por $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$. Hemos argumentado la siguiente definición:

Definición 1.4.2 Dados tres puntos $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ en $\mathbb{R}^3$ *no colineales* (es decir, que no esten en una misma linea), el *plano* que pasa por ellos es el conjunto

$$\Pi = \{\alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\ ;\ \alpha + \beta + \gamma = 1\}\,.$$

A una expresión de la forma $\alpha\,\mathbf{a}+\beta\,\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$ con $\alpha+\beta+\gamma = 1$ la llamaremos *combinación afín* (o *baricéntrica*) de los puntos $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ y a los coeficientes α, β, γ las *coordenadas baricéntricas* del punto $\alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$.

EJERCICIO 1.29 Considera tres puntos $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ no colineales, y sean α, β y γ las correspondientes coordenadas baricéntricas del plano que generan. Observa que cuando una de las coordenadas baricéntricas es cero entonces el punto correspondiente está en una de las tres rectas por $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$, ¿en cuál?, ¿puedes demostrarlo? Haz un dibujo de los tres puntos y sus tres rectas. Estas parten al plano en pedazos (¿cuántos?), en cada uno de ellos escribe los signos que toman las coordenadas baricéntricas (por ejemplo, en el interior del triángulo se tiene $(+,+,+)$ correspondiendo respectivamente a (α, β, γ)).

EJERCICIO 1.30 Dibuja tres puntos $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ no colineales. Con regla y compás encuentra los puntos $\mathbf{x} = (1/2)\mathbf{a} + (1/4)\,\mathbf{b} + (1/4)\,\mathbf{c}$, $\mathbf{y} = (1/4)\mathbf{a} + (1/2)\,\mathbf{b} + (1/4)\,\mathbf{c}$ y $\mathbf{z} = (1/4)\mathbf{a} + (1/4)\,\mathbf{b} + (1/2)\,\mathbf{c}$. Describe y argumenta tu construcción. Supon que puedes partir en tres el segmento $\overline{\mathbf{bc}}$ (hazlo midiendo con una regla o a ojo). ¿Puedes construir los puntos $\mathbf{u} = (1/2)\mathbf{a} + (1/3)\,\mathbf{b} + (1/6)\,\mathbf{c}$ y $\mathbf{v} = (1/2)\mathbf{a} + (1/6)\,\mathbf{b} + (1/3)\,\mathbf{c}$?

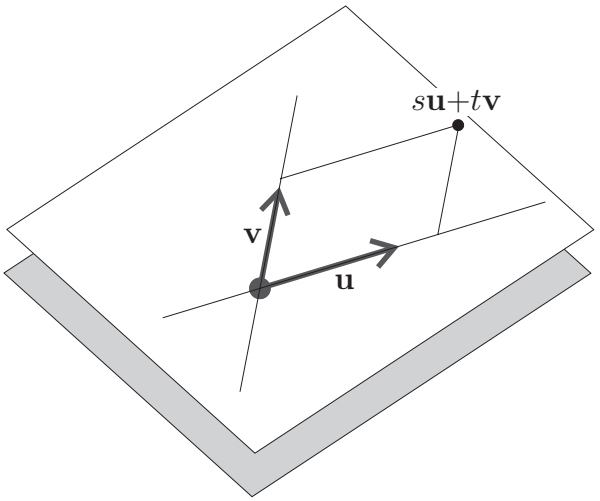
EJERCICIO 1.31 Demuestra que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no son colineales con el origen, entonces el conjunto $\{s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{v} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ es un plano por el origen. (Usa que $s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{v} = r\,\mathbf{0} + s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{v}$ para cualquier $r, s, t \in \mathbb{R}$).

EJERCICIO 1.32 Demuestra que si $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ estan en el plano Π de la Definición 1.4.2, entonces la recta que pasa por ellos esta contenida en Π.

Definición lineal

Emocionado el autor por su demostración del teorema de medianas usando coordenadas baricéntricas, se siguió de largo y definió planos en el espacio de una manera quizá no muy intuitiva. Que quede entonces la sección anterior como ejercicio en la manipulación de combinaciones de vectores, si no quedo muy clara puede releerse despues de esta. Pero conviene recapitular para definir planos de otra manera, para aclarar la definición y así dejarnos la tarea de demostrar una equivalencia de dos definiciones.

La recta que genera un vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, es el conjunto de todos sus "alargamientos" $\mathcal{L}_{\mathbf{u}} = \{s\,\mathbf{u} \mid s \in \mathbb{R}\}$. Si ahora tomamos un nuevo vector $\mathbf{v}$ que no esté en $\mathcal{L}_{\mathbf{u}}$, tenemos una nueva recta $\mathcal{L}_{\mathbf{v}} = \{t\,\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ que intersecta a la anterior sólo en el orígen. Estas dos rectas generan un plano que consiste de todos los puntos (en $\mathbb{R}^3$, digamos, para fijar ideas) a los cuáles se puede llegar desde el origen moviéndose unicamente en las direcciones $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Este plano por el origen claramente se describe con dos parametros independientes:



$$\Pi_0 = \{s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{v} \mid s,t \in \mathbb{R}\}\,,$$

que por su propia definición está hecho a imagen y semejanza del plano $\mathbb{R}^2$ (ver el ejercicio siguiente). Como lo hicimos con las rectas, podemos definir ahora a un plano cualquiera como un plano por el origen (el que acabamos de describir) trasladado por cualquier otro vector constante.

Definición 1.4.3 Un *plano* en $\mathbb{R}^3$ es un conjunto de la forma

$$\Pi = \{\mathbf{p} + s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{v} \mid s,t \in \mathbb{R}\}\,,$$

donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores no nulos tales que $\mathcal{L}_{\mathbf{u}} \cap \mathcal{L}_{\mathbf{v}} = \{\mathbf{0}\}$ y $\mathbf{p}$ es cualquier punto. A esta manera de describir un plano la llamaremos *expresión paramétrica*; a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se les llama *vectores direccionales* del plano Π y a $\mathbf{p}$ el *punto base* de la expresión paramétrica.

Para no confundirnos entre las dos definiciones de plano que hemos dado, llamemos *plano afín* a los que definimos en la sección anterior. Y ahora demostremos que las dos definiciones coinciden.

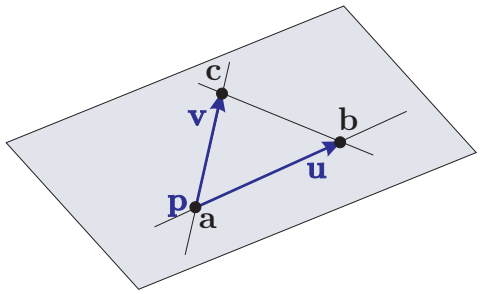
Lema 1.4.2 *En $\mathbb{R}^3$, todo plano es un plano afín y viceversa.*

Demostración. Sea Π como en la definición precedente. Debemos encontrar tres puntos en él y ver que todos los elementos de Π se expresan como combinación

baricéntrica de ellos. Los puntos más obvios son

$$\mathbf{a} := \mathbf{p}\,;\ \mathbf{b} := \mathbf{p} + \mathbf{u}\,;\ \mathbf{c} := \mathbf{p} + \mathbf{v}\,,$$

que claramente están en Π. Obsérvese que entonces se tiene que $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$, de tal manera que para cualquier $s, t \in \mathbb{R}$ tenemos que



$$\begin{aligned} \mathbf{p} + s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{v} &= \mathbf{a} + s\,(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + t\,(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \\ &= \mathbf{a} + s\,\mathbf{b} - s\,\mathbf{a} + t\,\mathbf{c} - t\,\mathbf{a} \\ &= (1 - s - t)\,\mathbf{a} + s\,\mathbf{b} + t\,\mathbf{c}\,. \end{aligned}$$

Puesto que los coeficientes de esta última expresión suman 1, esto demuestra que Π está contenido en el plano afín generado por $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. E inversamente, cualquier combinación afín de $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tiene está última expresión, y por la misma igualdad se ve que esta en Π. Obsérvese finalmente que si nos dan tres puntos $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, se pueden tomar como punto base a $\mathbf{a}$ y como vectores direccionales a $(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ y $(\mathbf{c} - \mathbf{a})$ para expresar paramétricamente al plano afín que generan, pues las igualdades anteriores se siguen cumpliendo.

Ver que las condiciones que pusimos en ambas definiciones coinciden se deja como ejercicio. □

Conviene, antes de seguir adelante, establecer cierta **terminología y notación** para cosas, nociones y expresiones que estamos usando mucho:

- Dados vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ en $\mathbb{R}^n$ (para incluir nuestros casos de interes $n = 2, 3$ de una buena vez), a una expresión de la forma

  $$s_1\mathbf{u}_1 + s_2\mathbf{u}_2 + \cdots + s_k\mathbf{u}_k$$

  donde $s_1, s_2, \ldots, s_k$ son números reales (escalares), se le llama una *combinación lineal* de los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ con *coeficientes* $s_1, s_2, \ldots, s_k$. Obsérvese que toda combinación lineal da como resultado un vector, pero que un mismo vector tiene muchas expresiones tales.

- Como ya vimos, a una combinación lineal cuyos coeficientes suman uno se le llama *combinación afín*. Y a una combinación afín de dos vectores distintos o de tres no colineales se le llama, además, *baricéntrica.*

- Al conjunto de **todas** las combinaciones lineales de los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ se le llama el *subespacio generado* por ellos y se le denotará $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle$. Es decir,

  $$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle := \{ s_1\mathbf{u}_1 + s_2\mathbf{u}_2 + \cdots + s_k\mathbf{u}_k \mid s_1, s_2, \ldots, s_k \in \mathbb{R} \}\,.$$

Nótese que entonces, si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ se tiene que $\mathcal{L}_{\mathbf{u}} = \langle \mathbf{u} \rangle$ es la recta generada por $\mathbf{u}$; y ambas notaciones se seguiran usando indistintamente. Aunque ahora $\langle \mathbf{u} \rangle$ tiene sentido para $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, en cuyo caso $\langle \mathbf{u} \rangle = \{\mathbf{0}\}$, y $\mathcal{L}_{\mathbf{u}}$ se usará para hacer enfásis en que **es** una recta.

- Se dice que dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son *linealmente independientes* si son no nulos y tales que $\mathcal{L}_{\mathbf{u}} \cap \mathcal{L}_{\mathbf{v}} = \{\mathbf{0}\}$.
- Dado cualquier subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, su *trasladado* por el vector (o al punto) $\mathbf{p}$ es el conjunto

$$A + \mathbf{p} = \mathbf{p} + A := \{\mathbf{x} + \mathbf{p} \mid \mathbf{x} \in A\}\,.$$

Podemos resumir entonces nuestras dos definiciones básicas como: una *recta* es un conjunto de la forma $\ell = \mathbf{p} + \langle \mathbf{u} \rangle$ con $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$; y un *plano* es un conjunto de la forma $\Pi = \mathbf{p} + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ con $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ linealmente independientes.

EJERCICIO 1.33 Demuestra que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente independientes, entonces la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(s,t) = s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{v}$ es inyectiva.

EJERCICIO 1.34 Demuestra que cualquier plano está en biyección con $\mathbb{R}^2$.

EJERCICIO 1.35 Demuestra que tres puntos $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ son no colineales si y sólo si los vectores $\mathbf{u} := (\mathbf{b} - \mathbf{a})$ y $\mathbf{v} := (\mathbf{c} - \mathbf{a})$ son linealmente independientes.

EJERCICIO 1.36 Da una expresión paramétrica para el plano que pasa por los puntos $\mathbf{a} = (0,1,2)$, $\mathbf{b} = (1,1,0)$ y $\mathbf{c} = (-1,0,2)$.

EJERCICIO 1.37 Demuestra que $\mathbf{0} \in \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle$ para cualquier $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ en $\mathbb{R}^n$.

EJERCICIO 1.38 Demuestra que dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente independientes si y sólo si la única combinación lineal de ellos que da $\mathbf{0}$ es la *trivial* (i.e., con ambos coeficientes cero).

EJERCICIO 1.39 Demuestra que

$$\mathbf{w} \in \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{w} + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\ .$$

1.5 Medio Quinto

Regresemos al plano. Ya tenemos la noción de recta, y en esta sección veremos que nuestras rectas cumplen con la parte de existencia del quinto postulado, que nuestra intuición va correspondiendo a nuestra formalización analítica de la geometría y que al cambiar los axiomas de Euclides por unos más básicos (los de los números reales) obtenemos a los anteriores, pero ahora como teoremas demostrables. Ya vimos que por

cualquier par de puntos se puede trazar un segmento que se extiende indefinidamente a ambos lados (Axiomas I y III), es decir, que por ellos pasa una recta. El otro axioma que involucra rectas es el Quinto y este incluye a la noción de paralelismo, así que habrá que empezar por ella.

Hay una definición conjuntista de rectas paralelas, formalizémosla. Como las rectas son, por definición, ciertos subconjuntos distinguidos del plano, tiene sentido la siguiente.

Definición 1.5.1 Dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 en $\mathbb{R}^2$ son *paralelas*, que escribiremos $\ell_1 \| \ell_2$, si no se intersectan, es decir si

$$\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset,$$

donde $\emptyset$ denota al conjunto vacio (ver Apendice 1).

Pero además de rectas tenemos algo más elemental que son los vectores (segmentos dirigidos) y entre ellos también hay una noción intuitiva de paralelismo que corresponde al "alargamiento" o multiplicación por escalares.

Definición 1.5.2 Dados dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ distintos de $\mathbf{0}$, diremos que $\mathbf{u}$ *es paralelo a* $\mathbf{v}$, que escribiremos $\mathbf{u} \| \mathbf{v}$, si existe un número $t \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{u} = t\,\mathbf{v}$.

Hemos eliminado al vector $\mathbf{0}$, el origen, de la definición para no complicarnos la vida. Si lo hubieramos incluido no es cierto el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 1.40 Demuestra que la relación "ser paralelo a" es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ (en el plano menos el origen llamado el "plano agujerado"). Describe las clases de equivalencia.

EJERCICIO 1.41 Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dos vectores distintos de $\mathbf{0}$. Demuestra que:

$$\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \cap \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \neq \{\mathbf{0}\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_{\mathbf{u}} = \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \quad .$$

EJERCICIO 1.42 Demuestra que la relación entre rectas "ser paralelo a" es simétrica pero no reflexiva.

EJERCICIO 1.43 Demuestra que dos rectas *horizontales*, es decir, con vector direccional $\mathbf{d} = (1, 0)$, o son paralelas o son iguales.

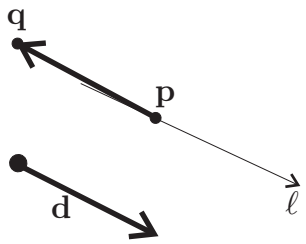
Con la noción de paralelismo de vectores, podemos determinar cuando un punto está en una recta.

Lema 1.5.1 *Sea ℓ la recta que pasa por $\mathbf{p}$ con dirección $\mathbf{d}$ ($\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$), y sea $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$, entonces*

$$\mathbf{q} \in \ell \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{q} - \mathbf{p}) \| \mathbf{d} \, .$$

Demostración. Tenemos que $\mathbf{q} \in \ell$ si y sólo si existe una $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} + t\,\mathbf{d}\,.$$

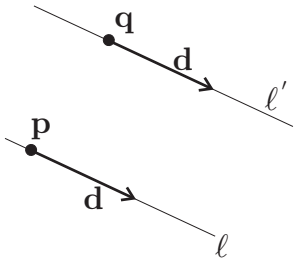


Pero esto es equivalente a que $\mathbf{q} - \mathbf{p} = t\,\mathbf{d}$, que por definición es que $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ es paralelo a $\mathbf{d}$. □

Teorema 1.5.1 (1/2 Quinto) *Sean ℓ una recta en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbf{q}$ un punto fuera de ella, entonces existe una recta ℓ' que pasa por $\mathbf{q}$ y es paralela a ℓ.*

Demostración. Nuestra definición de recta nos da un punto $\mathbf{p}$ y un vector dirección $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ para ℓ, de tal manera que

$$\ell = \{\mathbf{p} + t\,\mathbf{d} \mid t \in \mathbb{R}\}\,.$$



Es intuitivamente claro —y a la intuición hay que seguirla pues es, de cierta manera, lo que ya sabíamos— que la recta paralela deseada debe tener la misma dirección, así que definamos

$$\ell' = \{\mathbf{q} + s\,\mathbf{d} \mid s \in \mathbb{R}\}\,.$$

Como $\mathbf{q} \in \ell'$, nos falta demostrar que $\ell \| \ell'$, es decir, que $\ell \cap \ell' = \emptyset$.Para lograrlo, supongamos que no es cierto, es decir, que existe $\mathbf{x} \in \ell \cap \ell'$. Por las expresiones paramétricas de ℓ y ℓ', se tiene entonces que existen $t \in \mathbb{R}$ y $s \in \mathbb{R}$ para las cuales $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\,\mathbf{d}$ y $\mathbf{x} = \mathbf{q} + s\,\mathbf{d}$. De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbf{q} + s\,\mathbf{d} &= \mathbf{p} + t\,\mathbf{d} \\ \mathbf{q} - \mathbf{p} &= t\,\mathbf{d} - s\,\mathbf{d} \\ \mathbf{q} - \mathbf{p} &= (t - s)\,\mathbf{d}, \end{aligned}$$

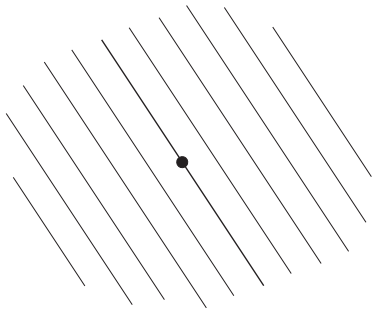
y entonces $\mathbf{q} \in \ell$ por el lema anterior, que es una contradicción a las hipótesis del teorema. Dicho de otra manera, como demostramos que $\ell \cap \ell' \neq \emptyset$ implica que $\mathbf{q} \in \ell$; podemos concluir que si $\mathbf{q} \notin \ell$, como en la hipótesis del teorema, no puede suceder que $\ell \cap \ell'$ sea no vacio; y por lo tanto $\ell \cap \ell' = \emptyset$ y $\ell \| \ell'$ por definición. Lo cual concluye con la parte de existencia del Quinto Postulado. □

La parte que falta demostrar del Quinto es la unicidad, es decir, que cualquier otra recta que pase por $\mathbf{q}$ sí intersecta a ℓ; que la única paralela es ℓ'. Esto se sigue de que rectas con vectores direccionales no paralelos siempre se intersectan, pero pospondremos la demostración formal de este hecho hasta tener más herramientas conceptuales. En particular, veremos en breve cómo encontrar la intersección de rectas para ejercitar la intuición, pero antes de entrarle, recapitulemos sobre la noción básica de esta sección, el paralelismo.

De la demostración del teorema se sigue que dos rectas con la misma dirección (o, lo que es lo mismo, con vectores direccionales paralelos) o son la misma o no se intersectan. Conviene entonces cambiar nuestra noción conjuntista de paralelismo a una vectorial.

Definición 1.5.3 Dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 son *paralelas*, que escribiremos $\ell_1 \| \ell_2$, si tienen vectores direccionales paralelos.

Con esta nueva definición (que es la que se mantiene en adelante) una recta es paralela a sí misma, dos rectas paralelas distintas no se intersectan (son paralelas en el viejo sentido) y la relación es claramente transitiva. Así que es una relación de equivalencia y las clases de equivalencia corresponden a las clases de paralelismo de vectores (las rectas agujeradas por el orígen). Llamaremos *haz de rectas paralelas* a una clase de paralelismo de rectas, es decir, al conjunto de todas las rectas paralelas a una dada (todas paralelas entre sí). Hay tantos haces de rectas paralelas como hay rectas por el orígen, pues cada haz contiene exactamente a una de estas rectas que, quitándole el origen, está formada por los posibles vectores direccionales para las rectas del haz.



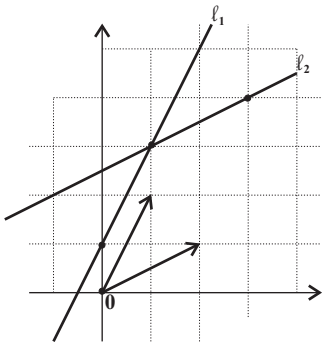
Además, nuestra nueva noción de paralelismo (1.5) tiene la gran ventaja de que se extiende a cualquier espacio vectorial. Nótese primero que la noción de paralelismo entre vectores no nulos se extiende sin problema a $\mathbb{R}^3$, pues está en términos del producto por escalares; y luego nuestra noción de paralelismo entre rectas se sigue de la de sus vectores direccionales. Por ejemplo, en el espacio $\mathbb{R}^3$ corresponde a nuestra noción intuitiva de paralelismo que no es conjuntista. Dos rectas pueden no intersectarse sin tener la misma dirección.

EJERCICIO 1.44 Da la descripción paramétrica de dos rectas en $\mathbb{R}^3$ que no se intersecten y que no sean paralelas.

EJERCICIO 1.45 (**Quinto D3**)Demuestra que dados un plano Π en $\mathbb{R}^3$ y un punto $\mathbf{q}$ fuera de él, existe un plano Π' que pasa por $\mathbf{q}$ y que no intersecta a Π.

1.6 Intersección de rectas I

En esta sección se analiza el problema de encontrar la intersección de dos rectas. De nuevo, sabemos por experiencia e intuición que dos rectas no paralelas se deben intersectar en un punto. ¿Cómo encontrar ese punto? es la pregunta que responderemos en esta sección.



Hagamos un ejemplo. Sean

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \{(0,1) + t(1,2) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ \ell_2 &= \{(3,4) + s(2,1) \mid s \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

La intersección de estas dos rectas $\ell_1 \cap \ell_2$ es el punto que cumple con las dos descripciones. Es decir, buscamos una $t \in \mathbb{R}$ y una $s \in \mathbb{R}$ que satisfagan

$$(0,1) + t(1,2) = (3,4) + s(2,1)$$

donde es importante haberle dado a los dos parametros diferente nombre. Esta ecuación vectorial se puede reescribir como

$$\begin{aligned} t(1,2) - s(2,1) &= (3,4) - (0,1) \\ (t - 2s, 2t - s) &= (3,3) \end{aligned}$$

que nos da una ecuacion lineal con dos incógnitas en cada coordenada. Es decir, debemos resolver el sistema:

$$\begin{aligned} t - 2s &= 3 \\ 2t - s &= 3 \end{aligned}$$

Despejando a t en la primera ecuación, se obtiene $t = 3 + 2s$. Y sustituyendo en la segunda obtenemos la ecuación lineal en la variable s

$$2(3 + 2s) - s = 3,$$

que se puede resolver directamente:

$$\begin{aligned} 6 + 4s - s &= 3 \\ 3s &= -3 \\ s &= -1. \end{aligned}$$

Y por lo tanto, sustituyendo este valor de s en la descripción de ℓ_2, el punto

$$(3,4) - (2,1) = (1,3)$$

está en las dos rectas. Nótese que basto con encontrar el valor de un sólo parametro, pues de la correspondiente descripción paramétrica se obtiene el punto deseado. Pero debemos encontrar el mismo punto si resolvemos primero el otro parametro. Veamos. Otra manera de resolver el sistema es eliminar a la variable s. Para esto nos conviene multiplicar por -2 a la segunda ecuación y sumarla a la primera, para obtener

$$-3t = -3$$

de donde $t = 1$. Que al sustituir en la parametrización de ℓ_1 nos da

$$(0, 1) + (1, 2) = (1, 3)$$

como esperabamos.

Observemos primero que hay muchas maneras de resolver un sistema de dos ecuaciones lineales (se llaman asi porque los exponentes de las incógnitas son uno –parece que no hay exponentes–) con dos incógnitas. Cualquiera de ellos es bueno y debe llevar a la misma solución.

Que en este problema particular aparezca un sistema de ecuaciones no es casualidad, pues en general, encontrar la intersección de rectas se tiene que resolver así. Ya que si tenemos dos rectas cualesquiera en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \{\mathbf{p} + t\,\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \\ \ell_2 &= \{\mathbf{q} + s\,\mathbf{u} \mid s \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Su intersección está dada por la t y la s que cumplen

$$\mathbf{p} + t\,\mathbf{v} = \mathbf{q} + s\,\mathbf{u}$$

que equivale a

$$t\,\mathbf{v} - s\,\mathbf{u} = \mathbf{q} - \mathbf{p} \tag{1.3}$$

Esta ecuación vectorial, a su vez, equivale a una ecuación lineal en cada coordenada. Como estamos en $\mathbb{R}^2$, y $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$ son constantes, nos da entonces un sistema de dos ecuaciones lineales con las dos incógnitas t y s. En cada caso particular el sistema se puede resolver de diferentes maneras; por ejemplo, despejando una incógnita y sustituyendo, o bien tomando múltiplos de las ecuaciones y sumándolas para eliminar una variable y obtener una ecuación lineal con una sola variable (la otra) que se resuelve directamente.

Para hacer la teoría y entender qué pasa con estos sistemas en general, será bueno estudiar a las ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera geométrica, veremos que también estan asociadas a las líneas rectas. Por el momento, de manera "algebráica", o mejor dicho, mecánica, resolvamos algunos ejemplos.

EJERCICIO 1.46 Encuentra los 6 puntos de intersección de las cuatro rectas del Ejercicio 1.4.

EJERCICIO 1.47 Encuentra las intersecciones de las rectas $\ell_1 = \{(2,0) + t(1,-2) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $\ell_2 = \{(2,1) + s(-2,4) \mid s \in \mathbb{R}\}$ y $\ell_3 = \{(1,2) + r(3,-6) \mid r \in \mathbb{R}\}$. Dibujalas para entender que está pasando.

1.6.1 Sistemas de ecuaciones lineales

Veremos ahora un método general para resolver sistemas.

Lema 1.6.1 *El sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} a\,s + b\,t &= e \\ c\,s + d\,t &= f \end{aligned} \tag{1.4}$$

en las dos incógnitas s, t tiene solución única si su determinante $ad - bc$ *es distinto de cero.*

Demostración. Hay que intentar resolver el sistema general, seguir un método que funcione en todos los casos independientemente de los valores concretos que puedan tener las constantes a, b, c, d, e y f. Y el método más general es el de "eliminar" una variable para despejar la otra.

Para eliminar la t del sistema (1.4), multiplicamos por d a la primera ecuación, y por $-b$ a la segunda, para obtener

$$\begin{aligned} ad\,s + bd\,t &= ed \\ -bc\,s - bd\,t &= -bf \end{aligned} \tag{1.5}$$

de tal manera que al sumar estas dos ecuaciones se tiene

$$(ad - bc)\,s = ed - bf\,. \tag{1.6}$$

Si $ad - bc \neq 0$ [2], entonces se puede despejar s:

$$s = \frac{ed - bf}{ad - bc}$$

Y analogamente (¡hágalo como ejercicio!), o bien, sustituyendo el valor de s en cualquiera de las ecuaciones originales (¡convénzase!), se obtiene t:

$$t = \frac{af - ec}{ad - bc}\,.$$

Lo cual demuestra que si el determinante es distinto de cero, la solución es única; es precisamente la de las dos fórmulas anteriores. □

[2] El número $ad - bc$ es llamado el *determinante* del sistema, porque determina que en este punto podamos proseguir.

Veámos ahora que pasa con el sistema 1.4 cuando su determinante es cero. Si $ad - bc = 0$, obsérvese que aunque la ecuación (1.6) parezca muy sofisticada porque tiene muchas letras, en realidad es o una contradicción (algo falso) o una trivialidad. El coeficiente de s es 0, así que el lado izquierdo es 0. Entonces, si el lado derecho no es 0 es una contradicción; y si sí es 0, es cierto para cualquier s y hay una infinidad (precisamente un $\mathbb{R}$) de soluciones.

Lo que sucedió en este caso ($ad - bc = 0$) es que al intentar eliminar a una de las variables también se eliminó la otra (como debió haberle sucedido al estudiante que hizo el Ejercicio 1.6). Entonces, o las dos ecuaciones son múltiplos y comparten soluciones (cuando $ed = bf$ las ecuaciones (1.5) ya son una la negativa de la otra); o bien, sólo los lados izquierdos son múltiplos pero los derechos no por el mismo factor ($ed \neq bf$) y no hay soluciones comunes.

Podemos resumir con el siguiente Teorema que ya hemos demostrado.

Teorema 1.6.1 *Un sistema de dos ecuaciones lineales*

$$\begin{aligned} a\,s + b\,t &= e \\ c\,s + d\,t &= f \end{aligned} \tag{1.7}$$

en las dos incógnitas s, t tiene solución única si y sólo si su determinante $ad - bc$ es distinto de cero. Además, si su determinante es cero (si $ad - bc = 0$) entonces no tiene solución o tiene una infinidad de ellas (tantas como $\mathbb{R}$).

Si recordamos que los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas aparecieron buscando la intersección de dos rectas, este Teorema corresponde a nuestra intuición de las rectas: dos rectas se intersectan en un sólo punto o no se intersectan o son la misma. De él dependerá la demostración de la mitad del Quinto que tenemos pendiente, pero conviene entrarle al toro por los cuernos: estudiar y entender primero el significado geométrico de las ecuaciones lineales con dos incógnitas.

EJERCICIO 1.48 Para las rectas de los dos ejercicios anteriores, determina cómo se intersectan las rectas, usando unicamente al determinante.

1.7 Producto Interior

En esta sección se introduce un ingrediente central para el estudio moderno de la geometría euclidiana: el "*producto interior*". Además de darnos la herramienta algebráica para el estudio geométrico de las ecuaciones lineales, en la sección siguiente, nos dará mucho más. De él derivaremos despues las nociones básicas de distancia y ángulo (de rigidez). Puede decirse que el producto interior es, aunque menos intuitivo, más elemental que las nociones de distancia y ángulo pues éstas se definirán en

base a aquel (aunque se verá tambien que estas dos juntas lo definen). El producto interior depende tan intimamente de la idea cartesiana de coordenadas, que no tiene ningún análogo en la geometría griega. Pero tampoco viene de los primeros pininos que hizo la geometría analítica, pues no es sino hasta el Siglo XIX que se le empezó a dar la importancia debida al desarrollarse las ideas involucradas en la noción general de espacio vectorial. Podría entonces decirse que el uso del producto interior (junto con el lenguaje de espacio vectorial) marca dos épocas en la geometría analítica. Pero es quizá la simpleza de su definición su mejor tarjeta de presentación.

Definición 1.7.1 Dados dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, su *producto interno* (también conocido como producto *escalar* —que preferimos no usar para no confundir con la multiplicación por escalares— o bien como producto *punto*) es el número real:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) := u_1 v_1 + u_2 v_2 \ .$$

En general, en $\mathbb{R}^n$, se define el *producto interior* (o el *producto punto*) de dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n)$ como la suma de los productos de sus coordenadas correspondientes, i.e.,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \ .$$

Asi, por ejemplo:

$$(4, 3) \cdot (2, -1) = 4 \times 2 + 3 \times (-1) = 8 - 3 = 5,$$
$$(1, 2, 3) \cdot (4, 5, -6) = 4 + 10 - 18 = -4.$$

Obsérvese que el producto interior tiene como ingredientes dos vectores ($\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$) y nos da un escalar ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}$); no debe confundirse con la multiplicación escalar, que de un escalar y un vector nos da un vector, excepto en el caso $n = 1$ en el que ambos coinciden con la multiplicación de los reales.

Antes de demostrar las propiedades básicas del producto interior, observemos que nos será muy útil para el problema que dejamos pendiente sobre sistemas de ecuaciones. Pues en una ecuación lineal con dos incógnitas, x y y digamos, aparece una expresión de la forma $ax + by$ con a y b constantes. Si tomamos un vector constante $\mathbf{u} = (a, b)$ y un vector variable $\mathbf{x} = (x, y)$, ahora podemos escribir

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = ax + by$$

y el "paquete básico" de información está en $\mathbf{u}$. En particular, como la mayoría de los lectores ya lo deben saber, la ecuación lineal

$$ax + by = c$$

dónde c es una nueva constante, define una recta. Con el producto interior esta ecuación se reescribe como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = c,$$

veremos cómo en el vector $\mathbf{u}$ y en la constante c se almacena la información geométrica de esa recta. Pero no nos apresuremos.

Como en el caso de la suma vectorial y la multiplicación por escalares, conviene demostrar primero las propiedades elementales del producto interior para manejarlo despues con más soltura.

Teorema 1.7.1 *Para todos los vectores* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$*, y para todo número* $t \in \mathbb{R}$ *se cumple que*

$$\begin{array}{ll} \textit{i)} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \\ \textit{ii)} & \mathbf{u} \cdot (t\ \mathbf{v}) = t\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \\ \textit{iii)} & \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \\ \textit{iv)} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0 \\ \textit{v)} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0} \end{array}$$

Demostración. Nos interesa demostrarlo en $\mathbb{R}^2$ (y como ejercicio en $\mathbb{R}^3$), aunque el caso general es escencialmente lo mismo. Convendrá usar la notación de la misma letra con subindices para las coordenadas, es decir, tomar $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$. El enunciado **(i)** se sigue inmediatamente de las definiciones y la conmutatividad de los números reales; **(ii)** se obtiene factorizando:

$$\mathbf{u} \cdot (t\,\mathbf{v}) = u_1(tv_1) + u_2(tv_2) = t(u_1v_1 + u_2v_2) = t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\ .$$

De la distributividad y conmutatividad en los reales se obtiene **(iii)**:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) \\ &= u_1v_1 + u_1w_1 + u_2v_2 + u_2w_2 \\ &= (u_1v_1 + u_2v_2) + (u_1w_1 + u_2w_2) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}\ . \end{aligned}$$

Al tomar el producto interior de un vector consigo mismo se obtiene

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2\ ,$$

que es una suma de cuadrados. Como cada cuadrado es positivo la suma también lo es (**iv**); y si fuera 0 significa que cada sumando es 0, es decir, que cada coordenada es 0 (**v**). □

EJERCICIO 1.49 Demuestra el teorema para $n = 3$.

EJERCICIO 1.50 Calcula el producto interior de los vectores del Ejercicio ??.

EJERCICIO 1.51 Demuestra sin usar **(v)**, sólo la definición de producto interior, que dado $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0\ \forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

(Observa que sólo hay que usar el lado izquierdo para dos vectores muy sencillos.)

EJERCICIO 1.52 Demuestra el análogo del ejercicio anterior en $\mathbb{R}^3$. ¿Y en $\mathbb{R}^n$?

1.7.1 El compadre ortogonal

El primer uso geométrico que le daremos al producto interior será para detectar perpendicularidad. Otra de las nociones básicas en los Axiomas de Euclides que incluyen el concepto de ángulo recto.

Fijemos al vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, y para simplificar la notación digámos que $\mathbf{u} = (a, b) \neq \mathbf{0}$. Si tomamos $\mathbf{x} = (x, y)$ como un vector variable, vamos a ver que las soluciones de la ecuación

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0 \ , \tag{1.8}$$

es decir, los puntos en $\mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas (x, y) satisfacen la ecuación

$$ax + by = 0,$$

forman una recta que es perpendicular a $\mathbf{u}$. Para esto consideraremos una solución particular (una de las más sencillas), $x = -b$, $y = a$; y será tan importante esta solución que le daremos nombre:

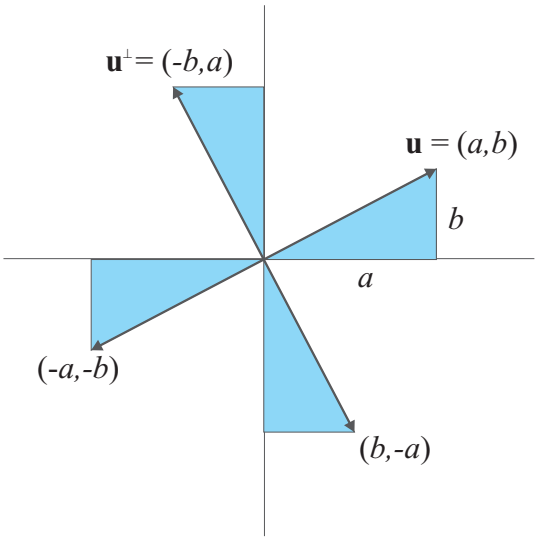
Definición 1.7.2 El *compadre ortogonal* del vector $\mathbf{u} = (a, b)$, denotado $\mathbf{u}^\perp$ y leido "$\mathbf{u}$–*perpendicular*" o "$\mathbf{u}$–*ortogonal*", es

$$\mathbf{u}^\perp = (-b, a) \ .$$

(Se intercambian coordenadas y a la primera se le cambia el signo.)

Se cumple que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^\perp = a(-b) + ba = 0;$$



y para justificar el nombre hay que mostrar que $\mathbf{u}^\perp$ se obtiene de $\mathbf{u}$ al girarlo 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj (alrededor del orígen). Para ver esto considérese la figura al margen, donde suponemos que el vector $\mathbf{u} = (a, b)$ está en el primer cuadrante, es decir, que $a > 0$ y $b > 0$. Al rotar el triángulo rectángulo de catetos a y b (e hipotenusa $\mathbf{u}$) un ángulo de 90° en el orígen se obtiene el correspondiente a $\mathbf{u}^\perp$. Se incluyen además las siguientes dos rotaciones para que quede claro que esto no depende de los signos de a y b.

Podemos concluir entonces que el "compadre ortogonal", pensado como la función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que manda al vector $\mathbf{u}$ en su perpendicular $\mathbf{u}^\perp$ ($\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}^\perp$) es la rotación de 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del orígen. Es fácil comprobar que $(\mathbf{u}^\perp)^\perp = -\mathbf{u}$, ya sea con la fórmula o porque la rotación de 180° (rotar y volver a rotar 90°) corresponde justo a tomar el inverso aditivo.

Como ya es costumbre, veamos algunas propiedades bonitas de la función "compadre ortogonal" respecto a las otras operaciones que hemos definido. La demostración, que consiste en dar coordenadas y aplicar definiciones, se deja al lector.

Lema 1.7.1 *Para todos los vectores* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$*, y para todo número* $t \in \mathbb{R}$ *se cumple que*

$$\begin{array}{ll} \textit{i)} & (\mathbf{u}+\mathbf{v})^{\perp} = \mathbf{u}^{\perp} + \mathbf{v}^{\perp} \\ \textit{ii)} & (t\,\mathbf{u})^{\perp} = t\,\left(\mathbf{u}^{\perp}\right) \\ \textit{iii)} & \mathbf{u}^{\perp}\cdot\mathbf{v}^{\perp} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \\ \textit{iv)} & \mathbf{u}^{\perp}\cdot\mathbf{v} = -\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}^{\perp}\right)\,. \end{array}$$

EJERCICIO 1.53 Demuestra el Lema.

Sistemas de ecuaciones lineales II

Usemos la herramienta del producto interior y el compadre ortogonal para revisar nuestro trabajo previo (Sección 1.6.1) sobre sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Si pensamos cada ecuación como la coordenada de un vector (y así fué como surgieron), un sistema tal se escribe

$$s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{v} = \mathbf{c}\,, \tag{1.9}$$

donde s y t son las incógnitas y $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ estan dados. Para que este sistema sea justo el que ya estudiamos, (1.4), denotemos coordenadas $\mathbf{u} = (a, c)$, $\mathbf{v} = (b, d)$; y para las constantes (con acrónimo $\mathbf{c}$), digamos que $\mathbf{c} = (e, f)$. Como esta es una ecuación vectorial, si la multiplicamos (con el producto interior) por un vector, obtendremos una ecuación lineal real. Y para eliminar a una variable, s digamos, podemos multiplicar por el compadre ortogonal de $\mathbf{u}$, para obtener

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{u}^{\perp}\cdot(s\,\mathbf{u}) + \mathbf{u}^{\perp}\cdot\,(t\,\mathbf{v}) &=& \mathbf{u}^{\perp}\cdot\mathbf{c} \\ s\,\left(\mathbf{u}^{\perp}\cdot\,\mathbf{u}\right) + t\,\left(\mathbf{u}^{\perp}\cdot\,\mathbf{v}\right) &=& \mathbf{u}^{\perp}\cdot\mathbf{c} \\ s\,(0) + t\,\left(\mathbf{u}^{\perp}\cdot\,\mathbf{v}\right) &=& \mathbf{u}^{\perp}\cdot\mathbf{c} \\ t\,\left(\mathbf{u}^{\perp}\cdot\mathbf{v}\right) &=& \mathbf{u}^{\perp}\cdot\mathbf{c} \end{array}$$

Definición 1.7.3 El *determinante* de los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ es el número real

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{u}^{\perp}\cdot\mathbf{v}$$

Así que si suponemos que $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$, podemos despejar t. De manera análoga podemos despejar s, y entonces concluir que el sistema de ecuaciones tiene solución única:

$$t = \frac{\mathbf{u}^{\perp}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{u}^{\perp}\cdot\mathbf{v}}\,,\ s = \frac{\mathbf{v}^{\perp}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{v}^{\perp}\cdot\mathbf{u}}\,;$$

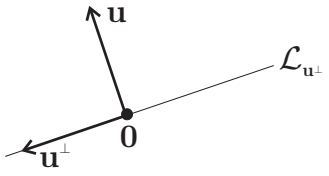
que es justo el Lema 1.6.1.

EJERCICIO 1.54 Es cribe en coordenadas ($\mathbf{u} = (a, c)$, $\mathbf{v} = (b, d)$) cada uno de los pasos anteriores para ver que corresponden al método clásico de eliminación. (Quizá te conviene escribir a las parejas como columnas, en vez de renglones, para que el sistema de ecuaciones sea claro).

La ecuación lineal homogénea

Ahora sí, describamos al conjunto de soluciones de la ecuación lineal homogénea:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0\,.$$



Proposicion 1.7.1 *Sea* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$*, entonces*

$$\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0\right\} = \mathcal{L}_{\mathbf{u}^\perp}\ ,$$

donde, recuérdese, $\mathcal{L}_{\mathbf{u}^\perp} = \left\{t\,\mathbf{u}^\perp \mid t \in \mathbb{R}\right\}$.

Demostración. Tenemos que demostrar la igualdad de dos conjuntos. Esto se hace en dos pasos que corresponden a ver que cada elemento de un conjunto está también en el otro.

La contención más fácil es "$\supseteq$". Un elemento de $\mathcal{L}_{\mathbf{u}^\perp}$ es de la forma $t\,\mathbf{u}^\perp$ para algún $t \in \mathbb{R}$. Tenemos que demostrar que $t\,\mathbf{u}^\perp$ está en el conjunto de la izquierda. Para esto hay que ver que satisface la condición de pertenencia, que se sigue de **(ii)** en el Lema anterior, y **(ii)** en el Teorema 1.7.1:

$$\mathbf{u} \cdot \left(t\,\mathbf{u}^\perp\right) = \mathbf{u} \cdot t\,\left(\mathbf{u}^\perp\right) = t\left(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^\perp\right) = 0.$$

Para la otra contención, tomamos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$ y debemos encontrar $t \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{x} = t\,\mathbf{u}^\perp$. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ las coordenadas de $\mathbf{u}$, es decir $\mathbf{u} = (a, b)$ y analogamente, sea $\mathbf{x} = (x, y)$. Entonces estamos suponiendo que

$$ax + by = 0.$$

Puesto que $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ por hipótesis, tenemos que $a \neq 0$ o $b \neq 0$; y en cada caso podemos despejar una variable para encontrar el factor deseado:

$$a \neq 0 \Rightarrow x = -\frac{b\,y}{a}$$

y por lo tanto

$$\mathbf{x} = (x, y) = \frac{y}{a}\,(-b, a) = \left(\frac{y}{a}\right)\mathbf{u}^\perp;$$

o bien,

$$b \neq 0 \Rightarrow y = -\frac{a\,x}{b} \Rightarrow \mathbf{x} = (x, y) = -\frac{x}{b}\,(-b, a) = \left(-\frac{x}{b}\right)\mathbf{u}^{\perp}.$$

□

Hemos demostrado que la ecuación lineal *homogénea* (se le llama así porque la constante es 0) $ax + by = 0$, con a y b constantes reales, tiene como soluciones a las parejas (x, y) que forman una recta por el origen de $\mathbb{R}^2$. Si empaquetamos la información de la ecuación en el vector $\mathbf{u} = (a, b)$, tenemos que $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, pues de lo contrario no habría tal ecuación lineal (sería la tautologia $0 = 0$ de lo que estamos hablando, y no es asi). Pero además hemos visto que el vector $\mathbf{u}$ es ortogonal (tambien llamado *normal*) a la recta en cuestión, pues ésta esta generada por el compadre ortogonal $\mathbf{u}^{\perp}$.

Se justifica entonces la siguiente definición, que era nuestro primer objetivo con el producto interior (donde de una vez, estamos extrapolando a todas las dimensiones).

Definición 1.7.4 Se dice que dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$ son *perpendiculares* u *ortogonales*, y se escribe $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Podemos refrasear entonces a la proposición anterior como "dada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, el conjunto de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen la ecuación $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$ son la recta *perpendicular* a $\mathbf{u}$".

Antes de estudiar la ecuación general (no necesariamente homogénea), notemos que si el producto interior detecta perpendicularidad, también se puede usar para detectar paralelismo en el plano.

Corolario 1.7.1 *Sean* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *dos vectores no nulos en* $\mathbb{R}^2$*, enonces*

$$\mathbf{u} \| \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^{\perp} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Demostración. Por la Proposición 1.7.1, $\mathbf{u}^{\perp} \cdot \mathbf{v} = 0$ si y sólo si $\mathbf{v}$ pertenece a la recta generada por $\left(\mathbf{u}^{\perp}\right)^{\perp}$, que es la recta generada por $\mathbf{u}$ pues $\left(\mathbf{u}^{\perp}\right)^{\perp} = -\mathbf{u}$. □

Hay que hacer notar que si les damos coordenadas a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$, digamos $\mathbf{u} = (a, b)$ y $\mathbf{v} = (c, d)$, entonces el determinante, que detecta paralelismo, es

$$\mathbf{u}^{\perp} \cdot \mathbf{v} = ad - bc$$

que ya habíamos encontrado como determinante del sistema de ecuaciones (1.9), pero tomando a $\mathbf{u} = (a, c)$ y $\mathbf{v} = (b, d)$.

EJERCICIO 1.55 Dibuja la recta definida como $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0\}$ para $\mathbf{u}$ cada uno de los siguientes vectores: a) $(1, 0)$, b) $(0, 1)$, c) $(2, 1)$, d) $(1, 2)$, e) $(-1, 1)$.

EJERCICIO 1.56 Describe el lugar geométrico definido como $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0\}$ para $\mathbf{u}$ cada uno de los siguientes vectores: a) $(1,0,0)$, b) $(0,1,0)$, c) $(0,0,1)$, d) $(1,1,0)$.

EJERCICIO 1.57 Sean $\mathbf{u} = (a,b)$ y $\mathbf{v} = (c,d)$ dos vectores no nulos. Sin usar el producto interior ni el compadre ortogonal –es decir, de la pura definición y con "algebrita elemental"– demuestra que $\mathbf{u}$ es paralelo a $\mathbf{v}$ si y sólo si $ad - bc = 0$. Compara con la última parte de la demostración de la Proposición 1.7.1.

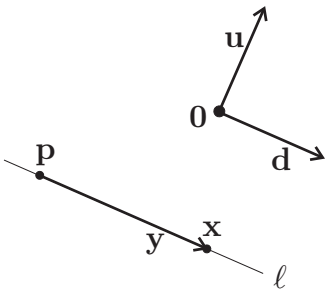
1.8 La ecuación normal de la recta

Demostraremos ahora que todas las rectas de $\mathbb{R}^2$ se pueden describir por una ecuación

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = c,$$

donde $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ es un vector normal a la recta y la constante $c \in \mathbb{R}$ es escogida apropiadamente. Esta ecuación vista en coordenadas, equivale a una ecuación lineal en dos variables ($ax + by = c$, al tomar $\mathbf{u} = (a,b)$ constante y $\mathbf{x} = (x,y)$ el vector variable). Históricamente, el hecho de que las rectas tuvieran tal descripción fué una gran motivación en el inicio de la geometría analítica.

Tomemos una recta con dirección $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$



$$\ell = \{\mathbf{p} + t\,\mathbf{d} \mid t \in \mathbb{R}\} \ .$$

Si definimos $\mathbf{u} := \mathbf{d}^{\perp}$ y $c := \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}$, afirmamos, es decir, demostraremos, que

$$\ell = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = c\right\} \ .$$

Llamémos ℓ' a este último conjunto; demostrar la igualdad $\ell = \ell'$, equivale a demostrar las dos contenciones $\ell \subseteq \ell'$ y $\ell' \subseteq \ell$.

Si $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\,\mathbf{d} \in \ell$, entonces (usando las propiedades del producto interior y del compadre ortogonal) tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{u} \cdot (\mathbf{p} + t\,\mathbf{d}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} + t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{d}) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} + t(\mathbf{d}^{\perp} \cdot \mathbf{d}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} + 0 = c \end{aligned}$$

lo cual demuestra que $\ell \subseteq \ell'$. Por el otro lado, dado $\mathbf{x} \in \ell'$ (i.e., tal que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = c$), sea $\mathbf{y} := \mathbf{x} - \mathbf{p}$ (obsérvese que entonces $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{y}$). Se tiene que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} = c - c = 0$$

Por la Proposición 1.7.1, esto implica que $\mathbf{y}$ es paralelo a $\mathbf{u}^{\perp} = -\mathbf{d}$; y por tanto que $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{y} \in \ell$. Esto demuestra que $\ell = \ell'$.

En resumen, hemos demostrado que toda recta puede ser descrita por una ecuación normal:

Teorema 1.8.1 *Dada una recta* $\ell = \{\mathbf{p} + t\,\mathbf{d} \mid t \in \mathbb{R}\}$ *en* $\mathbb{R}^2$. *Entonces* ℓ *consta de los vectores* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ *que cumplen la ecuación* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = c$, *que escribimos*

$$\ell : \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = c$$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{d}^{\perp}$ *y* $c = \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}$. □

Este Teorema también podría escribirse:

Teorema 1.8.2 *Sea* $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, *entonces*

$$\{\mathbf{p} + t\,\mathbf{d} \mid t \in \mathbb{R}\} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{d}^{\perp} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d}^{\perp} \cdot \mathbf{p}\right\}$$

Estos enunciados nos dicen cómo encontrar una ecuación normal para una recta descrita paramétricamente. Por **ejemplo**, la recta

$$\{(s - 2, 3 - 2s) \mid s \in \mathbb{R}\}$$

tiene como vector direccional al $(1, -2)$. Por tanto tiene vector normal a su compadre ortogonal $(2, 1)$, y como pasa por el punto $(-2, 3)$ entonces está determinada por la ecuación

$$\begin{aligned} (2,1) \cdot (x,y) &= (2,1) \cdot (-2,3) \\ 2x + y &= -1 \end{aligned}$$

(sustituya el lector las coordenadas de la descripción paramétrica en esta última ecuación).

Para encontrar una representación paramétrica de la recta ℓ dada por una *ecuación normal*

$$\ell : \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = c$$

(léase "ℓ dada por la ecuación $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = c$") bastará encontrar una solución particular $\mathbf{p}$ (que es muy fácil porque se puede dar un valor arbitrario a una variable, 0 es la más conveniente, y despejar la otra), pues sabemos que la dirección es $\mathbf{u}^{\perp}$ (o cualquier paralelo). Por **ejemplo**, la recta dada por la ecuación normal

$$2x - 3y = 2$$

tiene vector normal $(2, -3)$. Por tanto tiene vector direccional $(3, 2)$; y como pasa por el punto $(1, 0)$, es el conjunto

$$\{(1 + 3t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Esto también se puede lograr directamente de las coordenadas, pero hay que partirlo en casos. Si $\mathbf{u} = (a, b)$, tenemos

$$\ell : \quad ax + by = c.$$

Supongamos que $a \neq 0$. Entonces se puede despejar x:

$$x = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}y$$

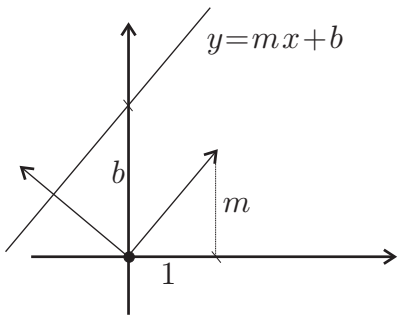
y todas las soluciónes de la ecuación se obtienen dando diferentes valores a y; es decir, son

$$\left\{ \left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a}y, y \right) \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(\frac{c}{a}, 0 \right) + y \left(-\frac{b}{a}, 1 \right) \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

que es una recta con dirección $(-b, a)$. Nos falta ver cuando $a = 0$, pero entonces la recta es la horizontal $y = c/b$. Si hubieramos hecho el análisis cuando $b \neq 0$, se nos hubiera confundido la notación de el caso clásico que vemos en el siguiente parrafo.

La ecuación "funcional" de la recta

Es bien conocida la ecuación *funcional de la recta:*



$$y = mx + b$$

y usada para describir rectas como gráficas de una función; aquí m es la *pendiente* y b es llamada la "*ordenada al orígen*" o el "*valor inicial*". En nuestros términos, esta ecuación se puede reescribir como

$$-mx + y = b$$

o bien, como

$$(-m, 1) \cdot (x, y) = b$$

Por lo tanto, tiene vector normal $\mathbf{n} = (-m, 1)$. Podemos escoger a $\mathbf{d} = (1, m) = -\mathbf{n}^{\perp}$ como su vector direccional y a $\mathbf{p} = (0, b)$ como una solución particular. Asi que su parametrización natural es (usando a x como parametro):

$$\{(0, b) + x(1, m) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x, mx + b) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

que es la gráfica de una función. Obsérvese que todas las rectas excepto las verticales (con dirección $(0, 1)$) se pueden expresar así.

No está de más observar que para cualquier función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se obtiene un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, llamado la *gráfica de la función* f definida paramétricamente como

$$\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\};$$

y entonces hemos visto que todas las rectas, excepto las vérticales, son la gráfica de funciones de la forma $f(x) = mx + b$, que en el Capítulo 3 llamaremos funciones afínes.

EJERCICIO 1.58 Para las siguientes rectas, encuentra una ecuación normal y, en su caso, su ecuación funcional

a) $\{(2,3) + t(1,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$
b) $\{(-1,0) + s(2,1) \mid s \in \mathbb{R}\}$
c) $\{(0,-2) + (-r,2r) \mid r \in \mathbb{R}\}$
d) $\{(1,3) + s(2,0) \mid s \in \mathbb{R}\}$
e) $\{(t-1,-2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

EJERCICIO 1.59 Da una descripción paramétrica de las rectas dadas por las ecuaciones

a) $2x - 3y = 1$
b) $2x - y = 2$
c) $2y - 4x = 2$
d) $x + 5y = -1$
e) $3 - 4y = 2x + 2$

EJERCICIO 1.60 Encuentra una ecuación normal para la recta que pasa por los puntos

a) $(2,1)$ y $(3,4)$
b) $(-1,1)$ y $(2,2)$
c) $(1,-3)$ y $(3,1)$
d) $(2,0)$ y $(1,1)$

EJERCICIO 1.61 Sean $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ dos puntos distintos en $\mathbb{R}^2$. Demuestra que la recta ℓ que pasa por ellos tiene ecuación normal:

$$\ell: \quad (\mathbf{q} - \mathbf{p})^{\perp} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{q}^{\perp} \cdot \mathbf{p}$$

EJERCICIO 1.62 Encuentra la intersección de las rectas (a) y (b) del segundo ejercicio de este bloque.

EJERCICIO 1.63 Encuentra la intersección de la recta (α) del primer ejercicio con la de la recta (α) del segundo, donde $\alpha \in \{\text{a,b,c,d}\}$.

EJERCICIO 1.64 Dibuja las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$.

1.8.1 Intersección de rectas II

Regresemos ahora al problema teórico de encontrar la intersección de rectas, pero con la nueva herramienta de la ecuación normal. Consideremos dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 en $\mathbb{R}^2$. Sean $\mathbf{u} = (a, b)$ y $\mathbf{v} = (c, d)$ vectores normales a ellas respectivamente, de tal manera que ambos son no nulos y existen constantes $e, f \in \mathbb{R}$ para las cuales

$$\begin{aligned} \ell_1 &: \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = e \\ \ell_2 &: \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = f \ . \end{aligned}$$

Es claro entonces que $\ell_1 \cap \ell_2$ consta de los puntos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen ambas ecuaciones. Si llamamos, como de costumbre, x y y a las coordenadas de $\mathbf{x}$ (es decir, si hacemos $\mathbf{x} = (x, y)$), las dos ecuaciones anteriores son el sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \ , \end{aligned}$$

con a, b, c, d, e, f constantes y x, y variables o incógnitas. Este es precisamente el sistema que estudiamos en la Sección **??**; aunque allá hablabamos de los "parametros s y t", son escencialmente el mismo. Pero ahora tiene el significado geométrico que anelabamos: resolverlo es encontrar el punto de intersección de dos rectas (sus coordenadas tal cual, y no los parametros para encontrarlo, como antes). Como ya hicimos el trabajo abstracto de resolver el sistema, sólo nos queda por hacer la traducción al lenguaje geométrico. Como ya vimos, el tipo de solución (una única, ninguna o tantas como reales) depende del determinante del sistema $ad - bc$, y este, a su vez, ya se nos a pareció (nótese que $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^\perp \cdot \mathbf{v} = ad - bc$) como el númerito mágico que detecta paralelismo (Corolario 1.7.1). De tal manera que del Corolario 1.7.1 y del Teorema 1.6.1 podemos concluir:

Teorema 1.8.3 *Dadas las rectas*

$$\begin{aligned} \ell_1 &: \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = e \\ \ell_2 &: \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = f \ . \end{aligned}$$

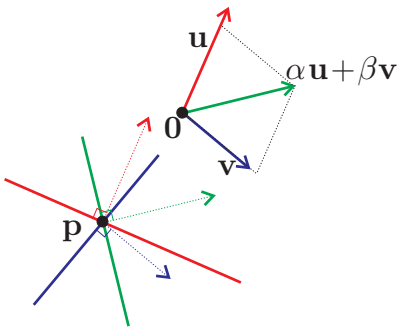
entonces:

i) $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0 \Leftrightarrow \ell_1 \cap \ell_2$ *es un único punto*
ii) $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \ell_1 \parallel \ell_2 \Leftrightarrow \ \ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset \ \ o \ \ell_1 = \ell_2$

Consideremos con más detenimiento el segundo caso, cuando el determinante $\mathbf{u}^\perp \cdot \mathbf{v}$ es cero y por tanto los vectores normales (y las rectas) son paralelos. Tenemos entonces que para alguna $t \in \mathbb{R}$, se cumple que $\mathbf{v} = t\,\mathbf{u}$ (nótese que $t \neq 0$, pues ambos vectores son no nulos). La disyuntiva de si las rectas no se intersectan o son iguales corresponde a que las constantes e y f difieran por el mismo factor, es decir si $f \neq t\,e$

o $f = t\,e$ respectivamente. Podemos sacar dos conclusiones interesantes. Primero, dos ecuaciones normales definen la misma recta si y sólo si las tres constantes que las determinan (en nuestro caso (a, b, e) y (c, d, f)) son vectores paralelos en $\mathbb{R}^3$. Y segundo, que al fijar un vector $\mathbf{u} = (a, b)$ y variar un parametro $c \in \mathbb{R}$, las ecuaciones $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = c$ determinan el haz de rectas paralelas que es ortogonal a $\mathbf{u}$.

Otro punto interesante en el que vale la pena recapitular es en el método que usamos para resolver sistemas de ecuaciones. Se consideraron ciertos múltiplos de ellas y luego se sumaron. Es decir, para ciertas α y βen $\mathbb{R}$ se obtiene, de las dos ecuaciones dadas, una nueva de la forma



$$(\alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x} = \alpha\,e + \beta\,f\ .$$

Esta es la ecuación de otra recta. La propiedad importante que cumple es que si $\mathbf{p}$ satisface las dos ecuaciones dadas entonces también satisface a ésta última por las propiedades de nuestras operaciones. De tal manera que esta nueva ecuación define una recta que pasa por el punto de intersección $\mathbf{p}$. El método de eliminar una variable consiste en encontrar la horizontal o la vertical que pasa por el punto (la mitad del problema). Pero en general, todas las ecuaciones posibles de la forma anterior definen el *haz de rectas concurrentes* por el punto de intersección $\mathbf{p}$ cuando $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no son paralelos, pues los vectores $\alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{v}$ (al variar α y β) son más que suficientes para definir todas las posibles direcciones.

Por último, y aunque hayamos ya demostrado la parte de existencia, concluyamos con el Quinto usando al Teorema 1.8.3

Teorema 1.8.4 *Dada una recta ℓ y un punto $\mathbf{p}$ fuera de ella en el plano, existe una única recta ℓ' que pasa por $\mathbf{p}$ y no intersecta a ℓ.*

Demostración. Existe un vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ y una constante $c \in \mathbb{R}$, tales que ℓ esta dada por la ecuación $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = c$. Sea

$$\ell' : \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}\ .$$

Entonces $\mathbf{p} \in \ell'$ porque satisface la ecuación, $\ell \cap \ell' = \emptyset$ porque $\mathbf{u} \cdot \mathbf{p} \neq c$ (pues $\mathbf{p} \notin \ell$), y cualquier otra recta por $\mathbf{p}$ intersecta a ℓ pues su vector normal no es paralelo a $\mathbf{u}$. □

EJERCICIO 1.65 Encuentra la intersección de las rectas (a), (b), (c) y (d) del Ejercicio 59.

EJERCICIO 1.66 Demuestra que dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^2$ son linealmente independientes si y sólo si $\mathbf{u}^{\perp} \cdot \mathbf{v} \neq 0$.

EJERCICIO 1.67 Demuestra que dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^2$ son linealmente independientes si y sólo si $\mathbb{R}^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

EJERCICIO 1.68 A cada terna de números reales (a, b, c), asociale la ecuación $a\,x + b\,y = c$.

i) ¿Cuáles son las ternas (como puntos en $\mathbb{R}^3$) a las que se le asocian rectas en $\mathbb{R}^2$ por su ecuación normal?

ii) Dada una recta en $\mathbb{R}^2$, describe las ternas (como subconjunto de $\mathbb{R}^3$) que se asocian a ella.

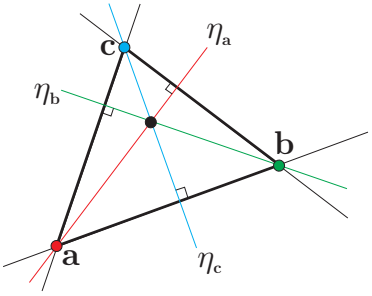
iii) Dado un haz de rectas paralelas en $\mathbb{R}^2$, describe las ternas (como subconjunto de $\mathbb{R}^3$) que se asocian a rectas de ese haz.

iv) Dado un haz de rectas concurrentes en $\mathbb{R}^2$, describe las ternas (como subconjunto de $\mathbb{R}^3$) que se asocian a las rectas de ese haz.

1.8.2 Teoremas de concurrencia

En esta sección, aplicamos la ecuación normal de las rectas para demostrar uno de los teoremas clásicos de concurrencia de líneas, dejando el otro como ejercicio.

La *altura* de un triángulo es la recta que pasa por uno de sus vértices y es ortogonal al lado opuesto.



Teorema 1.8.5 *Las alturas de un triángulo son concurrentes.*

Demostración. Dado un triángulo con vértices $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, tenemos que la altura por el vértice $\mathbf{a}$, llamémosla $\eta_{\mathbf{a}}$ ("eta-sub-a"), está definida por

$$\eta_{\mathbf{a}}: \quad (\mathbf{c}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{x} = (\mathbf{c}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}$$

pues es ortogonal al lado que pasa por $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$, que tiene dirección $(\mathbf{c}-\mathbf{b})$, y pasa por el punto $\mathbf{a}$. Análogamente:

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{b}} &: \quad (\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot\mathbf{x} = (\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot\mathbf{b} \\ \eta_{\mathbf{c}} &: \quad (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{x} = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{c} \end{aligned}$$

Obsérvese ahora que la suma (lado a lado) de dos de estas ecuaciones da precisamente el negativo de la tercera. Por ejemplo, sumando las dos primeras obtenemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{c}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{x} + (\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot\mathbf{x} &= (\mathbf{c}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{a} + (\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot\mathbf{b} \\ (\mathbf{c}-\mathbf{b}+\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot\mathbf{x} &= \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} \\ (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{x} &= (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} \end{aligned}$$

Asi que si $\mathbf{x} \in \eta_{\mathbf{a}} \cap \eta_{\mathbf{b}}$, entonces cumple las dos primeras ecuaciones y por tanto cumple su suma que es "menos" la ecuación de $\eta_{\mathbf{c}}$, y entonces $\mathbf{x} \in \eta_{\mathbf{c}}$. Asi que las tres rectas pasan por el mismo punto. □

EJERCICIO 1.69 Demuestra que las tres mediatrices de un triángulo son concurrentes (el punto en el que concurren se llama *circuncentro*). Donde la mediatriz de un segmento es su ortogonal que pasa por el punto medio.

EJERCICIO 1.70 Encuentra el circuncentro del triàngulo con vértices $(1,1)$, $(1,-1)$ y $(-2,-2)$. Haz el dibujo del triángulo y sus mediatrices.

1.8.3 Planos en el espacio II

Hemos definido las rectas en $\mathbb{R}^n$ por su representación paramétrica y, en $\mathbb{R}^2$, acabamos de ver que también tienen una representación normal (en base a una ecuación lineal). Es entonces importante hacer notar que este fenómeno sólo se da en dimensión 2. En $\mathbb{R}^3$, que es el otro espacio que nos interesa, los planos (¡no las rectas!) son las que se definen por la ecuación normal. Veamos esto con cuidado.

Dado un vector $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ distinto de $\mathbf{0}$; sea, para cualquier $d \in \mathbb{R}$,

$$\Pi_d : \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d$$

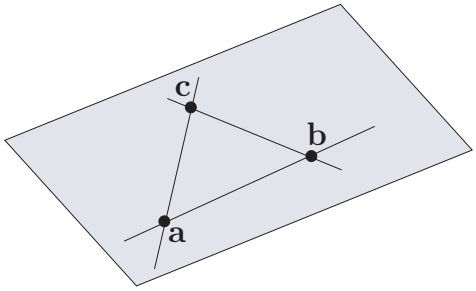
es decir, $\Pi_d := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d\}$. Llamamos a la constante d pues ahora el vector normal es de la forma $\mathbf{n} = (a, b, c)$ y entonces la ecuación anterior se escribe en coordenadas como

$$ax + by + cz = d$$

con el vector variable $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Afirmamos que Π_d es un plano. Recuérdese que definimos plano como el conjunto de combinaciones afínes (o baricéntricas) de tres puntos no colineales.

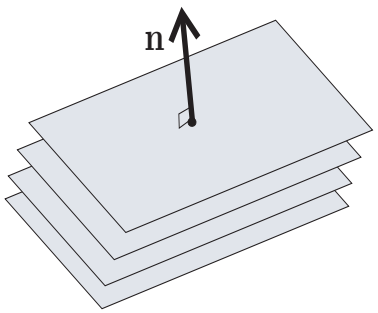
Veámos primero que si tres puntos $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ satisfacen la ecuación $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d$, entonces los puntos del plano que generan también la satisfacen. Para esto, tomamos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha + \beta + \gamma = 1$, y entonces se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) &= \alpha\,(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) + \beta\,(\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) + \gamma\,(\mathbf{n} \cdot \mathbf{c}) \\ &= \alpha d + \beta d + \gamma d \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)\; d = d. \end{aligned}$$



Lo cual demuestra que si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \Pi_d$ entonces el plano (o si son colineales, la recta) que generan está contenido en Π_d. Faltaría ver que en Π_d hay tres puntos no colineales y luego demostrar que no hay más soluciones que las del plano que generan.

Pero mejor veámoslo desde otro punto de vista; el lineal en vez del baricéntrico.Afirmamos que los conjuntos Π_d, al variar d son la familia de planos normales a $\mathbf{n}$. Para demostrar esto, hay que ver que Π_0 es un plano por el orígen y que Π_d es un transladado de Π_0, es decir, Π_0 empujado por algún vector constante.



Esto último ya se hizo en escencia cuando vimos el caso de rectas en el plano, asi que lo veremos primero para remarcar lo general de aquella demostración. Supongamos que $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ es tal que

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = d$$

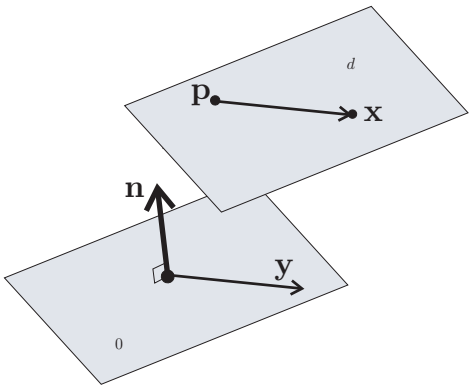
es decir, que es una solución particular. Vamos a demostrar que

$$\Pi_d = \Pi_0 + \mathbf{p} := \{\mathbf{y} + \mathbf{p} \mid \mathbf{y} \in \Pi_0\}\,; \tag{1.10}$$

es decir, que si $\mathbf{x} \in \Pi_d$ entonces $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{p}$ para algún $\mathbf{y} \in \Pi_0$, y al revés, que si $\mathbf{y} \in \Pi_0$ entonces $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{p} \in \Pi_d$.

Dado $\mathbf{x} \in \Pi_d$ (i.e., tal que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d$), sea $\mathbf{y} := \mathbf{x} - \mathbf{p}$. Como

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = d - d = 0\ ,$$



entonces $\mathbf{y} \in \Pi_0$ y es, por definición, tal que $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{p}$; por lo tanto $\Pi_d \subseteq \Pi_0 + \mathbf{p}$. Y al revés, si $\mathbf{y} \in \Pi_0$ y $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{p}$, entonces

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{p}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = 0 + d = d$$

y por lo tanto $\mathbf{x} \in \Pi_d$. Hemos demostrado (1.10).

Nos falta ver que Π_0 es efectivamente un plano por el origen. Puesto que estamos suponiendo que $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ entonces de la ecuación

$$ax + by + cz = 0$$

se puede despejar alguna variable en términos de las otras 2; sin perdida de generalidad, digamos que es z, es decir, que $c \neq 0$. De tal forma que al dar valores arbitrarios a x y y, la fórmula nos da un valor de z, y por tanto un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ que satisface la condición original $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$ –esto equivale a parametrizar las soluciones con $\mathbb{R}^2$; con dos grados de libertad. En particular hay una solución $\mathbf{u}$ con $x = 1$ y $y = 0$ (a saber, $\mathbf{u} = (1, 0, -a/c)$) y una solución $\mathbf{v}$ con $x = 0$ y $y = 1$ (¿cuál es?). Como claramente los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no son paralelos (tienen ceros en coordenadas distintas), generan linealmente todo un plano de soluciones (pues para cualquier $s, t \in \mathbb{R}$, se tiene que $\mathbf{n} \cdot (s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{v}) = s\,(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) + t\ \ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) = 0$). Falta ver que no hay más soluciones que las que hemos descrito, pero esto se lo dejamos al estudiante en el siguiente ejercicio, que hay que comparar con este parrafo para entender como se llegó a su elegante planteamiento.

EJERCICIO 1.71 Sea $\mathbf{n} = (a, b, c)$ tal que $a \neq 0$. Demuestra que

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0\} = \{\, s\,(-b, a, 0) + t\,(-c, 0, a) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

EJERCICIO 1.72 Describe el plano en $\mathbb{R}^3$ dado por la ecuación $x + y + z = 1$.

*EJERCICIO 1.73 Sea $\mathbf{n}$ un vector no nulo en $\mathbb{R}^n$.
a) Demuestra que $V_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0\}$ es un *subespacio vectorial* de $\mathbb{R}^n$; es decir, que la suma de vectores en V_0 se queda en V_0 y que el "alargamiento" de vectores en V_0 también está en V_0.
b) Demuestra que para cualquier $d \in \mathbb{R}$, el conjunto $V_d := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d\}$ es un trasladado de V_0; es decir, que existe un $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ tal que $V_d = V_0 + \mathbf{p} = \{\mathbf{y} + \mathbf{p} \mid \mathbf{y} \in V_0\}$.
c) ¿Qué dimensión dirías que tiene V_d? Argumenta un poco tu respuesta.

1.9 Norma y ángulos

Del producto interior, obtendremos la noción de *norma* o *magnitud* de los vectores, que corresponde a la *distancia* del punto al orígen.

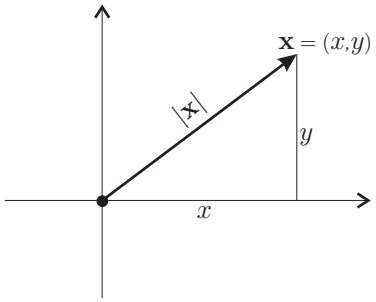
Definición 1.9.1 Dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, su *norma* (o *magnitud*) es el número real:

$$|\mathbf{v}| := \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\,,$$

de tal manera que la norma es una función $|\quad| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Como $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$, Teorema 1.7.1, tiene sentido tomar su raiz cuadrada (que a su vez se define como el número positivo tal que al elevarlo al cuadrado nos da el dado). Se tiene entonces la siguiente fórmula que es una definición equivalente de la norma y que será usada con mucho más frecuencia

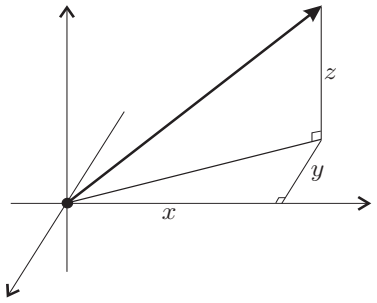
$$|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\,.$$



En $\mathbb{R}^2$ la norma se escribe, con coordenadas $\mathbf{v} = (x, y)$, como

$$|\mathbf{v}|^2 = x^2 + y^2.$$

Entonces $|\mathbf{v}|$ corresponde a la distancia euclidiana del orígen al punto $\mathbf{v} = (x, y)$, pues de acuerdo al Teorema de Pitágoras, x y y son lo que miden los catetos del triángulo rectángulo con hipotenusa $\mathbf{v}$. Aquí es donde resulta importante (por primera vez) que los ejes coordenados se tomen ortogonales, pues entonces la fórmula para calcular la distancia euclidiana al origen a partir de las coordenadas se hace sencilla.

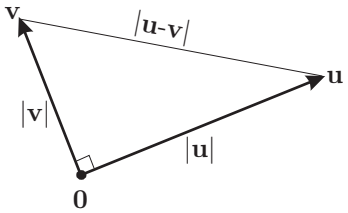


En $\mathbb{R}^3$, con coordenadas $\mathbf{v} = (x, y, z)$, la norma se escribe

$$|\mathbf{v}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

que de nuevo, usando dos veces el Teorema de Pitágoras (en los triángulos de la figura) y que la nueva dirección z es ortogonal al plano x, y , corresponde a la *magnitud* del vector $\mathbf{v}$.

Demostremos primero el Teorema de Pitágoras para vectores en general. Este Teorema fué la motivación básica para la definición de norma; sin embargo su uso ha sido sólo ese: como motivación, no lo hemos usado formalmente sino para ver que la norma corresponde a la noción euclidiana de distancia al origen (magnitud de vectores) cuando los ejes se toman ortogonales entre si. Ahora veremos que al estar en el trasfondo de nuestras definiciones, estas le hacen honor convirtiéndolo en verdadero.



Teorema 1.9.1 ***(Pitágoras)*** *Sean* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *dos vectores en* $\mathbb{R}^n$*. Entonces son perpendiculares si y sólo si*

$$|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 .$$

Demostración. De las propiedades del producto interior (y la definición de norma) se obtiene

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 &= (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - 2\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \\ &= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Por definición, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son perpendiculares si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ y entonces el teorema se sigue de la igualdad anterior. □

Asi que nuestra definición de perpendicularidad (que el producto punto se anule) corresponde a que el Teorema de Pitágoras se vuelva cierto. Y entonces nuestra manera informal de llamar, en $\mathbb{R}^3$, a las soluciones de la ecuación $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$ "el plano normal a $\mathbf{u}$", ahora tiene sentido. Pues por el Teorema anterior, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$ si y sólo si los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{x}$ son los catetos de un triángulo que cumple el Teorema de Pitágoras y por tanto es rectángulo.

Las propiedades básicas de la norma se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 1.9.2 *Para todos los vectores* $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ *y para todo número real* $t \in \mathbb{R}$ *se tiene que:*

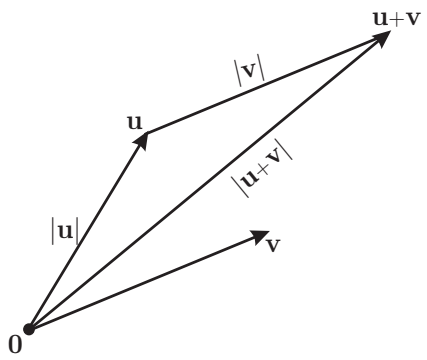
i.	$\|\mathbf{v}\| \geq 0$
ii.	$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$
iii.	$\|\, t\,\mathbf{v}\,\| = \|t\|\,\|\mathbf{v}\|$
iv.	$\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$
v.	$\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\|$

Demostración. La primera afirmacion es consecuencia inmediata de la definición de raiz cuadrada, y la segunda del Teorema **??**. La tercera, donde también se usa ese teorema, es muy simple pero con una sutileza:

$$|\, t\,\mathbf{v}\,|^2 = (t\mathbf{v})\cdot(t\mathbf{v}) = t^2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = t^2\,|\mathbf{v}|^2$$

de donde, tomando raiz cuadrada, se deduce $|\, t\,\mathbf{v}\,| = |t|\,|\mathbf{v}|$. Pues $\sqrt{t^2}$ no siempre es t sino su *valor absoluto* $|t|$ que es positivo siempre (y que podría definirse $|t| := \sqrt{t^2}$); nótese además que como $|\mathbf{v}| \geq 0$ entonces $\sqrt{|\mathbf{v}|^2} = |\mathbf{v}|$. Obsérvese que para $n = 1$ (es decir, en $\mathbb{R}$) la norma y el balor absoluto coinciden, asi que usar la misma notación para ambos no causa ningún conflicto.

El inciso **(iv)** es conocido como "**la desigualdad del triángulo**", pues dice que en el triángulo con vértices $\mathbf{0}, \mathbf{u}$ y $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, es más corto irse directamente de $\mathbf{0}$ a $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ ($|\mathbf{u}+\mathbf{v}|$) que pasar primero por $\mathbf{u}$ ($|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$). Para demostrarla, nótese primero que como ambos lados de la desigualdad son no negativos, entonces está es equivalente a que la misma desigualdad se cumpla para los cuadrados, i.e.,



$$|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \geq |\mathbf{u}+\mathbf{v}| \quad \Leftrightarrow \quad (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2 \geq |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2\ .$$

Y está última desigualdad es equivalente a que $(|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2 - |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 \geq 0$. Así que debemos desarrollar el lado izquierdo:

$$\begin{aligned}(|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2 - |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 &= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2 - (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2\,|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + 2\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})) \\ &= 2(|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}))\ .\end{aligned}$$

Queda entonces por demostrar que $|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \geq (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$, pero esto se sigue del inciso **(v)**, que es una afirmación más fuerte que demostraremos a continuación independientemente.

El inciso (**v**) es conocido como "**la desigualdad de Schwartz**". Por un razonamiento análogo al del inciso anterior, bastará demostrar que $(|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|)^2 - |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|^2$ es positivo. Lo haremos para $\mathbb{R}^2$ con coordenadas, dejando el caso de $\mathbb{R}^3$, y de $\mathbb{R}^n$, como ejercicios. Supongamos entonces que $\mathbf{u} = (a, b)$ y $\mathbf{v} = (\alpha, \beta)$ para obtener

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|^2 &= \left(a^2+b^2\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right) - (a\alpha+b\beta)^2 \\ &= a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 \\ &\quad - \left(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + 2a\alpha b\beta\right) \\ &= a^2\beta^2 - 2\,(a\beta)\,(b\alpha) + b^2\alpha^2 \\ &= (a\beta - b\alpha)^2 \geq 0\,; \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es porque el cuadrado de cualquier número es no negativo. Lo cual demuestra la desigualdad de Schwartz, la del Triángulo y completa al Teorema. □

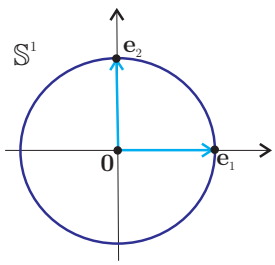
EJERCICIO 1.74 Demuestra que dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son perpendiculares si y sólo si $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2$. Haz el dibujo.

EJERCICIO 1.75 Demuestra que dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son perpendiculares si y sólo si $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| = |\mathbf{u}-\mathbf{v}|$. Haz el dibujo. Observa que este enunciado corresponde a que un paralelogramo es un rectángulo si y sólo si sus diagonales miden lo mismo.

EJERCICIO 1.76 Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores no nulos. Demuestra que tienen la misma norma si y sólo si $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ son ortogonales.

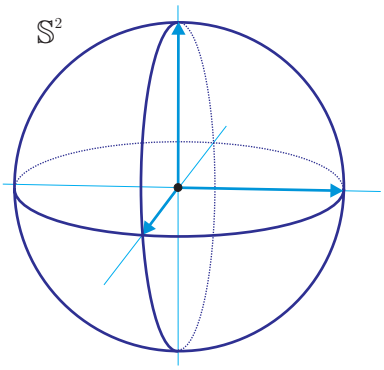
EJERCICIO 1.77 Demuestra la desigualdad de Schwartz en $\mathbb{R}^3$. ¿Puedes dar, o describir, la demostración en $\mathbb{R}^n$?

1.9.1 El círculo unitario



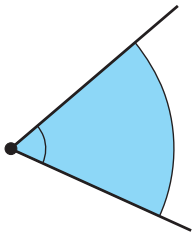
A los vectores que tienen norma igual a uno, se les llama *vectores unitarios*. Y al conjunto de todos los vectores unitarios en $\mathbb{R}^2$ se le llama el *círculo unitario* y se le denota $\mathbb{S}^1$. La notación viene de la palabra "sphere" en ingles, que significa esfera; pues en general se puede definir a la *esfera de dimensión n* como

$$\mathbb{S}^n = \left\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |\mathbf{x}| = 1 \right\}\ .$$

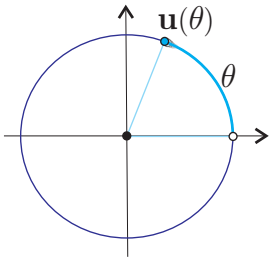


Nótese que el exponente se refiere a la dimensión de la esfera en sí, y que ésta necesita una dimensión más para "vivir". Así, la esfera de dimensión 2 vive en $\mathbb{R}^3$, y es la representación abstracta de las pompas de jabón. Más adelante la estudiaremos con cuidado. Por lo pronto nos interesa el círculo unitario.

Los puntos de $\mathbb{S}^1$ corresponden a los *ángulos*, y a estos los mediremos con radianes. La definición formal o muy precisa de ángulo involucra necesariamente nociones de cálculo que no entran en este libro. Sin embargo, es un concepto muy intuitivo y de esa intuición nos valdremos. Un *ángulo* es un sector radial del círculo unitario, aunque se denota gráficamente como un arco chiquito cerca del centro para indicar que no depende realmente del círculo de referencia, es más bien un sector de cualquier círculo concéntrico. Es costumbre partir el círculo completo en 360 sectores iguales llamados *grados*. Resulta conveniente usar el número 360, pues como $360 = 2^3 3^2 5$ tiene muchos divisores, asi que el círculo se puede partir en cuatro sectores iguales de 90 grados (denotado $90°$ y llamado *ángulo recto*) o en 12 de $30°$ que corresponden a las horas del reloj, etc. Pero la otra manera de medirlos, que no involucra la convención de escoger 360 para la vuelta entera, es por la longitud del arco de círculo que abarcan; a esta medida se le conoce como *radianes*. Un problema clásico que resolvieron los griegos con admirable precisión fué medir la *circunferencia* del círculo unitario (de radio uno), es decir, cuanto mide un hilo "untado" en el círculo. El resultado, como todos sabemos, es el doble del famoso número $\pi = 3.14159...$, donde los puntos suspensivos indican que su expresión decimal sigue infinitamente pues no es racional. Otra manera de entender a los radianes es cinemática y es la que usaremos a continuación para establecer notación; es la versión teórica del movimiento de la piedra en una honda justo antes de lanzarla.

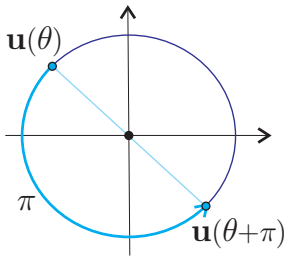


Si una particula viaja dentro de $\mathbb{S}^1$ a velocidad constante 1, partiendo del punto $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ y en dirección contraria a las manecillas del reloj (es decir, saliendo hacía arriba con vector velocidad $\mathbf{e}_2 = (0,1)$) entonces en un tiempo θ estará en un punto que llamaremos $\mathbf{u}(\theta)$; en el tiempo $\pi/2$ estará en el $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ (es decir, $\mathbf{u}(\pi/2) = \mathbf{e}_2$), en el tiempo π en el $(-1,0)$ y en el 2π estará de regreso para empezar de nuevo. El tiempo aquí, que estamos midiendo con el parametro θ, corresponde precisamente a los *radianes*, pues viajando a velocidad constante 1 el tiempo es igual a la distancia recorrida. Podemos también darle sentido a $\mathbf{u}(\theta)$ para θ negativa pensando que la particula viene dando vueltas desde siempre (tiempo infinito negativo) de tal manera que en el tiempo 0 pasa justo por $\mathbf{e}_1$, es decir, que



$$\mathbf{u}(0) = (1,0).$$

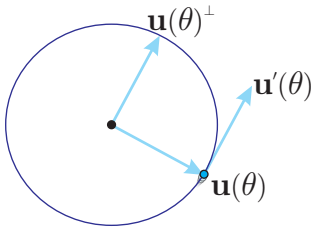
Nuestra suposición básica es que la función $\mathbf{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ que hemos descrito, está bien definida. Se cumple entonces que



$$\mathbf{u}\,(\theta) = \mathbf{u}\,(\theta + 2\pi)\,,$$

pues en tiempo 2π la particula da justo una vuelta (la longitud del círculo mide lo mismo independientemente de dónde empezemos a medir). Y también que $\mathbf{u}\,(\theta + \pi) = -\mathbf{u}\,(\theta)$, pues π es justo el ángulo que da media vuelta.

Observemos ahora que al pedir que la particula viaje en el círculo unitario con velocidad constante 1 entonces su *vector velocidad*, que incluye ahora dirección además de magnitud, es tangente a $\mathbb{S}^1$ (la piedra de la honda sale por la tangente), y es fácil ver que entonces es perpendicular al vector de posición $\mathbf{u}\,(\theta)$, pero más precisamente es justo su compadre ortogonal porque va girando en "su" dirección, "hacia él". Usando la notación de derivadas, podríamos escribir

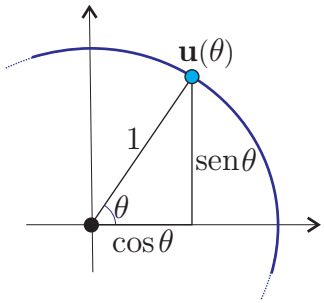


$$\mathbf{u}'\,(\theta) = \mathbf{u}\,(\theta)^{\perp}\,.$$

Hay que remarcar que al medir ángulos con radianes, si bien ganamos en naturalidad matemática, es inevitable la ambigüedad de que a los ángulos no corresponde un número único. Pues θ y $\theta + 2n\pi$, para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, determinan al mismo ángulo, es decir $\mathbf{u}\,(\theta) = \mathbf{u}\,(\theta + 2n\pi)$. Podemos exigir que θ este en el intervalo entre 0 y 2π, o bien, que resulta más agradable geométricamente, en el intervalo de $-\pi$ a π, para reducir la ambigüedad sólo a los extremos. Pero al sumar o restar ángulos, inevitablemente nos saldremos de este intervalo y habría que volver a ajustar.

Funciones trigonométricas

Recordemos ahora que $\mathbb{S}^1$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, así que el punto $\mathbf{u}(\theta)$ tiene dos coordenadas precisas. Estas estan dadas por las importantísimas *funciones trigonométricas* coseno y seno. Más precisamente, podemos definir

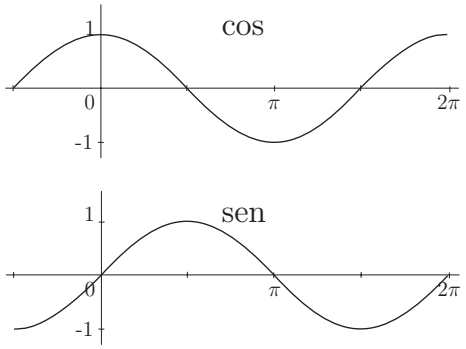


$$(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) := \mathbf{u}(\theta),$$

es decir, $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ son las coordenadas cartesianas del punto $\mathbf{u}(\theta) \in \mathbb{S}^1$. Entonces el coseno y el seno corresponden respectivamente al cateto adyacente y al cateto opuesto de un triángulo rectángulo con hipotenusa 1 y ángulo θ, como se ve en trigonometría de secundaria. Se puede también pensar que si damos por establecidas a las funciones Seno y Coseno, entonces la función $\mathbf{u}\,(\theta)$ está dada por la ecuación anterior. Hay que remarcar que la pertenencia $\mathbf{u}(\theta) \in \mathbb{S}^1$ equivale entonces a la ecuación

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

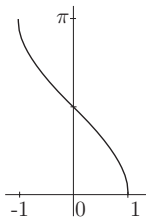
Las propiedades de la función **u** que hemos enumerado, traducidas a sus coordenadas (por ejemplo, la del vector velocidad se traduce a $\cos'\theta = -\operatorname{sen}\theta$ y $\operatorname{sen}'\theta = \cos\theta$) son suficientes para definir a las funciones cos y sen, y en adelante las daremos por un hecho. Sus bien conocidas gráficas aparecen en la Figura.



Observemos, por último, que cualquiera de las funciones coseno o seno casi determinan al ángulo pues de la ecuación anterior se pueden despejar con la ambiguedad de un signo al tomar raiz cuadrada, es decir,

$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}.$$

Dicho de otra manera, dado x en el intervalo de -1 a 1 (escrito $x \in [-1,1]$[3], o bien $-1 \leq x \leq 1$) tenemos dos posibles puntos en $\mathbb{S}^1$ con esa ordenada, a saber $\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$ y $\left(x, -\sqrt{1-x^2}\right)$. Entonces con la ambiguedad de un signo podemos determinar el ángulo del cuál x es el coseno. Si escogemos la parte superior del círculo unitario obtenemos una función, llamada *arcocoseno* y léida *"el arco cuyo coseno es ..."*



$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

definida por

$$\cos\left(\arccos\left(x\right)\right) = x.$$

La ambigüedad surge al componer en el otro sentido, pues para $\theta \in [-\pi,\pi]$ se tiene $\arccos\left(\cos\left(\theta\right)\right) = \pm\theta$. Obsérvese que entonces la mitad superior del círculo unitario se describe como la gráfica de la función $x \mapsto \operatorname{sen}\left(\arccos\left(x\right)\right)$.

EJERCICIO 1.78 Demuestra (usando que definimos $\mathbf{u}\left(\theta\right) \in \mathbb{S}^1$) que para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$ se cumplen

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos\theta \leq 1 \\ -1 &\leq \operatorname{sen}\theta \leq 1 \end{aligned}$$

EJERCICIO 1.79 Demuestra que para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$ se cumplen

$$\begin{array}{lll} \cos\left(\theta+\pi/2\right) = -\operatorname{sen}\theta & \cos\left(\theta+\pi\right) = -\cos\theta & \cos\left(-\theta\right) = \cos\theta \\ \operatorname{sen}\left(\theta+\pi/2\right) = \cos\theta & \operatorname{sen}\left(\theta+\pi\right) = -\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\left(-\theta\right) = -\operatorname{sen}\theta \end{array}$$

EJERCICIO 1.80 Construye una tabla con los valores de las funciones cos y sen para los ángulos $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, -\pi/3, -\pi/4,$ y dibuja los correspondientes vectores unitarios.

---

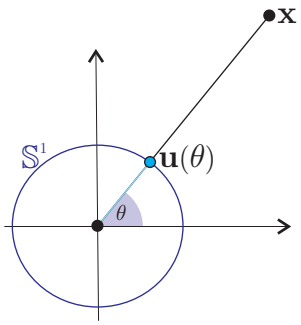
[3]Dados $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$, denotamos por $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ al *intervalo cerrado* entre a y b.

EJERCICIO 1.81 ¿Cuál es el conjunto de números que usan las coordenadas de las horas del reloj?

1.9.2 Coordenadas polares

El círculo unitario $\mathbb{S}^1$ (a cuyos puntos hemos identificado con los ángulos tomando su ángulo con el vector base $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$) tiene justo un representante de cada posible dirección en $\mathbb{R}^2$, donde ahora una dirección y su opuesta son diferentes (aunque sean, según nuestra definición, paralelas). De tal manera que a cualquier punto de $\mathbb{R}^2$ que no sea el origen se llega viajando en una (y exactamente una) de estas direcciones. Esta es la idea central de las coordenadas polares, que en muchas situaciones son más naturales, o útiles, para identificar los puntos del plano. Por ejemplo, son las que intuitivamente usa un cazador: apuntar —decidir una dirección— es la primera coordenada y luego, de acuerdo a la distancia del pato —la segunda coordenada— tiene que ajustar el tiro para que las trayectorias de pato y perdigones se intersecten.

Sea $\mathbf{x}$ cualquier vector no nulo en $\mathbb{R}^2$. Entonces $|\mathbf{x}| \neq 0$ y tiene sentido tomar el vector $\left(|\mathbf{x}|^{-1}\right)\mathbf{x}$, que es unitario pues como $|\mathbf{x}| > 0$ implica que $|\mathbf{x}|^{-1} > 0$, entonces tenemos



$$\left||\mathbf{x}|^{-1}\mathbf{x}\right| = \left||\mathbf{x}|^{-1}\right||\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|^{-1}|\mathbf{x}| = 1.$$

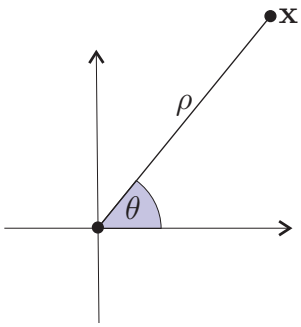
De aquí que existe un único $\mathbf{u}(\theta) \in \mathbb{S}^1$ (aunque θ no es único como real, sí lo es como ángulo) tal que

$$\mathbf{u}(\theta) = |\mathbf{x}|^{-1}\mathbf{x}$$

y claramente se cumple que

$$\mathbf{x} = |\mathbf{x}|\ \mathbf{u}(\theta).$$

A $\mathbf{u}(\theta)$ se le referira como la *dirección* de $\mathbf{x}$. A la pareja $(\theta, |\mathbf{x}|)$ se le llama las *coordenadas polares* del vector $\mathbf{x}$. Se usa el término "coordenadas" pues determinan al vector, es decir, si nos dan una pareja (θ, ρ) con $\rho \geq 0$ obtenemos un vector



$$\mathbf{x} = \rho\,\mathbf{u}(\theta)$$

con magnitud ρ y dirección $\mathbf{u}(\theta)$, o bien, *ángulo* θ. Obsérvese que sólo con el origen hay ambiguedad: si $\rho = 0$ en la formúla anterior, para cualquier valor de θ obtenemos al origen; éste no tiene un ángulo definido. Así que al hablar de coordenadas polares supondremos que el vector en cuestión es no nulo. Por nuestra convención de $\mathbf{u}(\theta)$, lo que representa θ es el ángulo respecto al eje x en su dirección positiva.

EJERCICIO 1.82 Da las coordenadas (cartesianas) de los vectores cuyas coordenadas polares son $(\pi/2, 3)$, $\left(\pi/4, \sqrt{2}\right)$, $(\pi/6, 2)$, $(\pi/6, 1)$.

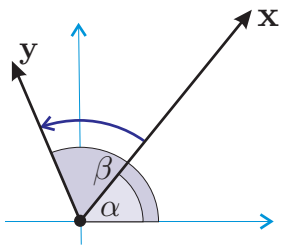
EJERCICIO 1.83 Si tomamos (θ, ρ) como coordenadas polares, describe los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ definidos por las ecuaciones $\theta = cte$ ("θ igual a una constante") y $\rho = cte$.

1.9.3 Angulo entre vectores

Podemos usar coordenadas polares para definir el ángulo entre vectores en general.

Definición 1.9.2 Dados $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, dos vectores no nulos en $\mathbb{R}^2$, sean $(\alpha, |\mathbf{x}|)$ y $(\beta, |\mathbf{y}|)$ sus coordenadas polares respectivamente. El *ángulo de* $\mathbf{x}$ *a* $\mathbf{y}$ es

$$\overrightarrow{\text{ang}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \beta - \alpha$$



Obsérvese que el ángulo tiene dirección (de ahí que le hayamos puesto la flechita de sombrero), ya que claramente

$$\overrightarrow{\text{ang}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\overrightarrow{\text{ang}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

Pues $\overrightarrow{\text{ang}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ corresponde al movimiento angular que nos lleva de la dirección de $\mathbf{x}$ a la de $\mathbf{y}$, y $\overrightarrow{\text{ang}}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ es justo el movimiento inverso. Así que podemos resumir diciendo que las coordenadas polares de un vector $\mathbf{x}$ (recúerdese que al aplicar el término ya suponemos que es no nulo) es la pareja

$$\left(\overrightarrow{\text{ang}}(\mathbf{e}_1, \mathbf{x}), |\mathbf{x}|\right).$$

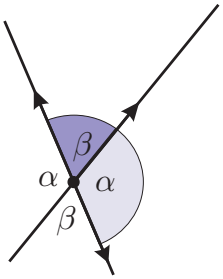
Con mucha frecuencia van a aparecer ángulos no dirigidos, pensados como un sector del círculo unitario sin principio ni fin determinados. Para ellos usaremos la notación $\text{ang}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (sin la flechita), llamándolo el *ángulo* entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$. Aunque intuitivamente es claro lo que queremos (piénsese en una porción de una pizza), su definición es un poco más laboriosa. Si tomamos dos vectores unitarios en $\mathbb{S}^1$, estos parten al círculo en dos sectores, uno de ellos es menor que medio círculo y ese es el ángulo entre ellos. Asi que debemos pedir que

$$0 \leq \text{ang}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \pi.$$

Y es claro que escogiendo a α y a β (los ángulos de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, respectivamente) de manera adecuada se tiene que $\text{ang}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := |\beta - \alpha| \in [0, \pi]$. Asi que, por ejemplo, $\text{ang}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ significa que $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ apuntan en la misma dirección, mientras que $\text{ang}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \pi$ significa que $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ apuntan direcciones contrarias, y $\text{ang}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \pi/2$ cuando son perpendiculares.

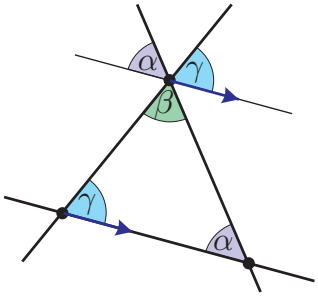
EJERCICIO 1.84 Cuál es el ángulo de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$, cuando **a)** $\mathbf{x} = (1, 0)$, $\mathbf{y} = (0, -2)$ **b)** $\mathbf{x} = (1, 1)$, $\mathbf{y} = (0, 1)$ **b)** $\mathbf{x} = \left(\sqrt{3}, 2\right)$, $\mathbf{y} = (1, 0)$.

Suma de ángulos



Si ya definimos ángulo entre vectores, resulta natural definir el *ángulo entre dos rectas* como el ángulo entre sus vectores direccionales. Pero hay una ambiguedad pues podemos escoger direcciones opuestas para una misma recta. Esta ambiguedad equivale a que dos rectas que se intersectan definen cuatro sectores o "ángulos" que se agrupan naturalmente en dos parejas opuestas por el vértice que miden lo mismo; y estos dos ángulos son *complementarios*, es decir, suman π. No vale la pena entrar en los detalles formales de esto usando vectores direccionales pues sólo se confunde lo obvio, que desde muy temprana edad sabemos. Pero si podemos delinear rapidamente la demostración de que la suma de los ángulos de un triángulo siempre es π, que para Euclides tuvo que ser axioma (disfrazado o no).

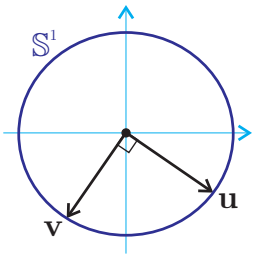
Un triángulo son tres rectas que se intersectan dos a dos (pero no las tres), y en cada vértice (la intersección de dos de las rectas) define un ángulo interno; llamémoslos α, β y γ. Al trazar la paralela a un lado del triángulo que pasa por el vértice opuesto (usando al Quinto), podemos medir ahí los tres ángulos, pues por nuestra demostración del Quinto esta paralela tiene el mismo vector direccional que el lado oríginal, y nuestra definición de ángulo entre lineas usa la de ángulo entre vectores direccionales. Finalmente, hay que observar que si en ese vértice cambiamos uno de los ángulos por su opuesto, los tres ángulos se juntan para formar el ángulo de un vector a su opuesto, es decir, suman π. Hemos delineado la demostración del siguiente Teorema clásico.



Teorema 1.9.3 *Los ángulos internos de un triángulo suman* π. □

1.10 Bases ortonormales

Definición 1.10.1 Una *base ortonormal* de $\mathbb{R}^2$ es una pareja de vectores unitarios perpendiculares.



Por ejemplo, la *base canónica* $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ es una base ortonormal, y para cualquier $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^1$ se tiene que $\mathbf{u}, \mathbf{u}^\perp$ es una base ortonormal, pues tambien $\left|\mathbf{u}^\perp\right| = 1$. Obsérvese además que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son una base ortonormal entonces ambos estan en $\mathbb{S}^1$ y además $\mathbf{v} = \mathbf{u}^\perp$ o $\mathbf{v} = -\mathbf{u}^\perp$. Por el momento, su importancia radica en que es muy fácil escribir a cualquier vector como combinación lineal de una base ortonormal:

Teorema 1.10.1 *Sean* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *una base ortonormal de* $\mathbb{R}^2$*, entonces para cualquier* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ *se tiene que*

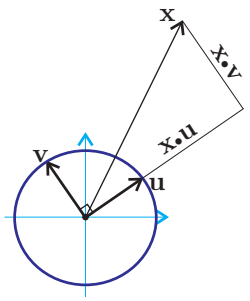
$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})\, \mathbf{u} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\, \mathbf{v} \ .$$

Demostración. Suponemos que $\mathbf{x}$ está dado, y vamos a resolver el sistema de ecuaciones

$$s\, \mathbf{u} + t\, \mathbf{v} = \mathbf{x} \tag{1.11}$$

con incógnitas t, s. Tomando producto interior con $\mathbf{u}$ en la ecuación anterior obtenemos

$$s\, (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + t\, (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} \ .$$



Pero $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{1}$ pues $\mathbf{u}$ es unitario y $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$ pues $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son perpendiculares, asi que

$$s \ = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} \ .$$

Analogamente, tomando producto interior por $\mathbf{v}$, se obtiene que $t = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}$. De tal manera que el sistema (1.11) sí tiene solución y es la que asegura el teorema. □

Vale la pena observar que el truco que acabamos de usar para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas no es nuevo, lo usamos en la Sección 1.7.1 tomando producto interior con el compadre ortogonal; la diferencia es que aquí el otro vector de la base ortonormal está dado.

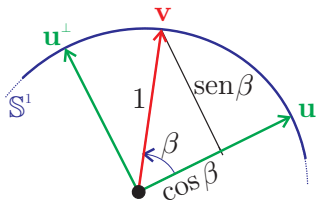
Como corolario a este teorema obtenemos la interpretación geométrica del producto interior de vectores unitarios.

Corolario 1.10.1 *Si* $\mathbf{u},\ \mathbf{v} \in \mathbb{S}^1$ *y* α *es el ángulo entre ellos, i.e.,* $\alpha = \operatorname{ang}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$*, entonces*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \cos \alpha$$

Demostración. Sea $\beta = \overrightarrow{\operatorname{ang}}\, (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ el ángulo de $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, de tal manera que, escogiéndolos adecuadamente, se tiene que $\alpha = \pm\beta$. Usando el teorema anterior con la base ortonormal $\mathbf{u}, \mathbf{u}^\perp$ y el vector $\mathbf{v}$ (en vez de $\mathbf{x}$) se obtiene

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\, \mathbf{u} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^\perp)\, \mathbf{u}^\perp \ .$$



Pero también es claro geométricamente que

$$\mathbf{v} = \cos\beta\, \mathbf{u} + \operatorname{sen}\beta\, \mathbf{u}^\perp \ .$$

Puesto que $\cos\beta = \cos\alpha$, pues $\alpha = \pm\beta$, el corolario se sigue de que la solución de un sistema con determinante no cero es única (en nuestro caso el determinante del sistema $\mathbf{v} = s\, \mathbf{u} + t\, \mathbf{u}^\perp$ es $\det\left(\mathbf{u}, \mathbf{u}^\perp\right) = \mathbf{u}^\perp \cdot \mathbf{u}^\perp = 1$). □

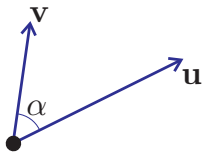
EJERCICIO 1.85 Demuestra que si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son una *base ortonormal* de $\mathbb{R}^3$ (es decir, si los tres son unitarios y dos a dos son perpendiculares), entonces para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ se tiene que

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})\,\mathbf{u} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{v} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{w} \ .$$

EJERCICIO 1.86 Escribe a los vectores $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,1)$ y $(-1,3)$ como combinación lineal de $\mathbf{u} = (3/5, 4/5)$ y $\mathbf{v} = (4/5, -3/5)$, (es decir, como $t\,\mathbf{u} + s\,\mathbf{v}$ con t y s apropiadas).

1.10.1 Fórmula geométrica del producto interior

Como consecuencia del corolario anterior obtenemos un resultado importante que nos dice que el producto interior puede definirse en términos de la norma y el ángulo entre vectores.



Teorema 1.10.2 *Sean* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *dos vectores en* $\mathbb{R}^2$ *y* α *el ángulo entre ellos, entonces*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\alpha \ .$$

Demostración. Si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$) la igualdad anterior se cumple (pues ambos lados son 0); podemos suponer entonces que ambos son distintos de cero. Ahora podemos reescalar a $\mathbf{u}$ (y a $\mathbf{v}$) para ser unitarios (pues tiene sentido $(|\mathbf{u}|^{-1})\mathbf{u}$ que es un vector unitario) manteniendo el ángulo entre ellos. Y por el Corolario 1.10.1

$$\cos\alpha = (\frac{1}{|\mathbf{u}|})\mathbf{u}\cdot(\frac{1}{|\mathbf{v}|})\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}|}$$

de donde se sigue imediatamente el teorema. □

De esta fórmula geométrica para el producto interior, se obtiene que $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = |\cos\alpha|\,|\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}|$, asi que la desigualdad de Schwartz ($|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \geq |\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}|$) es equivalente a $|\cos\alpha| \leq 1$.

EJERCICIO 1.87 Demuestra **La ley de los cosenos** para vectores, es decir, que dados dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ con ángulo α entre ellos, se cumple que

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\,|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\alpha \ .$$

Observa que el Teorema de Pitágoras es un caso especial.

EJERCICIO 1.88 Encuentra la distancia de los puntos $\mathbf{p}_1 = (0,5)$, $\mathbf{p}_2 = (4,0)$ y $\mathbf{p}_3 = (-1,1)$ a la recta $\ell = \{t(4,3) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

1.10.2 El caso general

Puesto que el Teorema 1.10.1 y su Corolario 1.10.1 se demostraron en $\mathbb{R}^2$, puede dudarse de la validez de los resultados que dependieron de ellos en el caso general de $\mathbb{R}^n$, pero nos interesa establecer el caso $n = 3$. Vale la pena entonces hacer unas aclaraciones y ajustes a manera de repaso. Lo que realmente se uso del Teorema 1.10.1 fué que cuando $\mathbf{u}$ es un vector unitario (en cualquier dimensión ahora) entonces $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}$ tiene un significado geométrico muy preciso: es lo que hay que viajar en la dirección $\mathbf{u}$ para que de ahí, $\mathbf{x}$ quede en dirección ortogonal a $\mathbf{u}$. Podemos precisarlo de la siguiente manera.

Lema 1.10.1 *Sea $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario (es decir, tal que $|\mathbf{u}| = 1$). Entonces para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ existe un vector $\mathbf{y}$ perpendicular a $\mathbf{u}$ y tal que*

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})\,\mathbf{u} + \mathbf{y}\ .$$

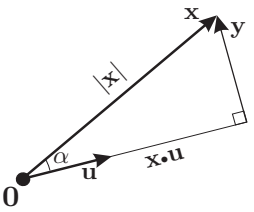
Demostración. Es muy fácil, declaremos $\mathbf{y} := \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})\,\mathbf{u}$ y basta ver que $\mathbf{y} \cdot \mathbf{u} = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} &= (\mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})\,\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0\,. \end{aligned}$$

□

Si pensamos ahora en el plano generado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{x}$ (en el que también se encuentra $\mathbf{y}$) y dentro de él en el triángulo rectángulo $\mathbf{0}, (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})\,\mathbf{u}, \mathbf{x}$; se obtiene que

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{x}|}$$



donde α es el ángulo entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{x}$. Y de aquí, el Teorema 1.10.2 se sigue inmediatamente al permitir que $\mathbf{u}$ sea no necesariamente unitario. Ademas, sus dos corolarios, y por lo tanto el Teorema 1.9.2 valen también en $\mathbb{R}^n$.

Si nos ponemos quisquillosos con la formalidad, se notará una falla en lo anterior (pasamos un "strike" al lector), pues no hemos definido "ángulo entre vectores" más allá de $\mathbb{R}^2$. Tómese entonces como la motivación intuitiva para la definición general que hará que todo cuadre bien.

Definición 1.10.2 Dados dos vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$ el *ángulo entre ellos* es

$$\operatorname{ang}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}\right).$$

Nótese que por la desigualdad de Schwartz (dejada al lector para $\mathbb{R}^3$ en el Ejercicio 1.9) el árgumento de la función arccos está en el intervalo $[-1, 1]$, así que está bien definido el ángulo, y queda en el intervalo $[0, \pi]$.

Hay que remarcar que a partir de $\mathbb{R}^3$ ya no tiene sentido hablar de ángulos dirigidos, esto sólo se puede hacer en el plano. Pues si tomamos dos vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^3$, no hay manera de decir si el viaje angular de $\mathbf{u}$ hacia $\mathbf{v}$ es positivo o negativo. Esto dependería de escoger un lado del plano para "verlo" y ver si va contra o con el reloj, pero cualquiera de los dos lados son "iguales" y desde cada uno se "ve" lo contrario del otro; no hay una manera coherente de decidir. Lo que sí se puede decir es cuándo tres vectores están orientados positivamente, pero esto se verá mucho más adelante. De tal manera que a partir de $\mathbb{R}^3$, sólo el ángulo entre vectores está definido, y tiene valores entre 0 y π; donde los extremos corresponden a paralelismo pero con la misma dirección (ángulo 0) o la contraria (ángulo π).

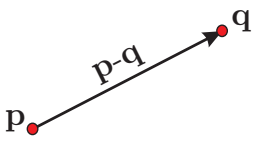
EJERCICIO 1.89 Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, dos vectores unitarios y ortogonales en $\mathbb{R}^3$. Demuestra que para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ existe un único $\mathbf{w} \in \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ (el plano generado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$) tal que $\mathbf{x} - \mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$; al punto $\mathbf{w}$ se le llama la *proyección ortogonal* de $\mathbf{x}$ al plano $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. ¿Puedes concluir que la distancia del punto $\mathbf{x}$ al plano $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ es

$$\sqrt{|\mathbf{x}|^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})^2} \, ?$$

1.11 Distancia

Esta sección cierra el capítulo con una breve discusión sobre el concepto euclidiano de distancia. Que se deduce naturalmente de la norma

Dados dos puntos $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ se puede definir su *distancia euclidiana*, o simplemente su *distancia*, $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, como la norma de su diferencia, es decir, como la magnitud del vector que lleva a uno en otro, i.e.,



$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{p} - \mathbf{q}| \ ,$$

que explicitamente en coordenadas da la fórmula (en $\mathbb{R}^2$)

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Las propiedades básicas de la distancia se reúnen en el siguiente

Teorema 1.11.1 *Para todos los vectores* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ *se cumple que*

i). $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \mathbf{0}$
ii). $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$
iii). $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$
iv). $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$

Espacio métrico es un conjunto en el que está definida una distancia que cumple con las cuatro propiedades del Teorema **1.11.1**.

EJERCICIO 1.90 Da explicitamente con coordenadas la fórmula de la distancia en $\mathbb{R}^3$ y en $\mathbb{R}^n$.

EJERCICIO 1.91 Demuestra el Teorema **1.11.1.**

EJERCICIO 1.92 ¿Podría el lector mencionar algún espacio métrico distinto del que se definió arriba?

1.11.1 El espacio euclidiano (primera misión cumplida)

Cuando a $\mathbb{R}^n$ se le piensa junto con la distancia antes definida (llamada la *distancia euclidiana*), se dice que es el espacio euclidiano de dimensón n —que a veces se denota $\mathbb{E}^n$, y que formalmente podríamos definir $\mathbb{E}^n := (\mathbb{R}^n, d)$— ya que éste cumple con los postulados de Euclides para $n = 2$. Veámos.

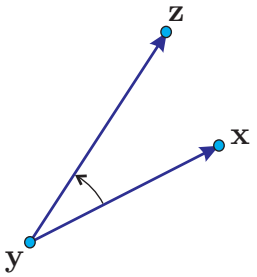
Hemos demostrado que $\mathbb{R}^2$ cumple los tres postulados que se refieren a rectas, nos falta analizar dos. El II se refiere a "trazar" círculos. Ya hemos trabajado con el círculo unitario y claramente se generaliza. Dado un punto $\mathbf{p}$ y una distancia r (un número positivo) definimos el *círculo con centro* $\mathbf{p}$ *y radio* r como el conjunto de puntos a distancia r de $\mathbf{p}$ (se estudiará en el siguiente Capítulo). Es un cierto subconjunto de $\mathbb{R}^2$, que además es no vacio (es fácil dar explicitamente un punto en él usando coordenadas); y nuestra noción de "definir" un conjunto es la análoga de "trazar" para los griegos. Se cumple entonces el axioma II.

Nos falta unicamente discutir el IV, "todos los ángulos rectos son iguales". Esta afirmación es sútil. Tenemos, desde hace un buen rato, la noción de ángulo recto, perpendicularidad u ortogonalidad, pero ¿a qué se refiere la palabra "igualdad" en el contexto griego? Si fuera a la igualdad del numerito que mide los ángulos, la afirmación es obvia, casi vacua —"$\pi/2$ es igual a $\pi/2$"—, y no habría necesidad de enunciarla como axioma. Entonces se refiere a algo mucho más profundo. En este postulado está implicita la noción de *movimiento*, se entiende "igualdad" como que podemos *mover* al plano para llevar un ángulo recto formado por dos rectas a cualquier otro. Esto es claro al ver otros Teoremas clásicos como "dos triángulos son *iguales* si sus lados miden lo mismo": no se puede referir a la igualdad estricta de conjuntos, quiere decir que se puede *llevar* a uno sobre el otro para que, entonces sí, coincidan como conjuntos. Y este *llevar* es el *movimiento* implicito en el uso de la palabra "igualdad". En términos modernos, esta noción de *movimiento* del plano se formaliza con la noción de función. Nosotros lo haremos hasta el Capítulo 3, y corresponderá formalmente a la noción de *isometría* (una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que preserva distancias). Pero ya no queremos distraernos con la discusión de la axiomática griega. Creámos de buena fe que al desarrollar formalmente los conceptos

necesarios el Postulado IV será cierto, o tomemóslo en su asepción numérica trivial, para concluir esta discución con la que arrancamos el libro.

En base a los axiomas de los números reales construimos El Plano Euclidiano, $\mathbb{E}^2$, con todo y sus nociones básicas que cumplen los postulados de Euclides. Se tiene entonces que para estudiarlo son igualmente validos el método *sintético* (el que usaban los griegos pues sus axiomas ya son ciertos) o el *analítico* (que abrió Descartes y estamos siguiendo). En este último método siempre hay elementos del primero, no siempre es más directo irse a coordenadas; no hay un divorcio y en general es muy dificil trazar la linea que los separa, además no vale la pena. No hay que preocuparse de eso, en cada momento agarra uno lo que conviene. Pero sí hay que hacer enfásis en la enorme ventaja que dió el método cartesiano, al construir de golpe (y sólo con un poquito de esfuerzo extra) espacios euclidianos para todas las dimensiones. Es un método que permitió generalizar y abrir, por tanto, nuevos horizontes. Y no sólo en cuestión de dimensiones.

Como se verá en capítulos subsiguientes, siguiendo el método analítico se pueden construir espacios de dimensión 2 con formas "raras" de medir ángulos y distancias que los hacen cumplir todos los axiomas menos el Quinto, y haciéndolos entonces espacios *no-euclidianos*. Pero esto vendrá a su tiempo; por el momento y para cerrar el círculo de esta discución, reescribiremos con la noción de distancia el Teorema con el que empezamos, cuya demostración se deja como ejercicio, y donde, nótese, tenemos el extra del "si y sólo si".



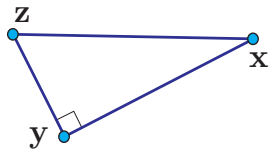
Se puede definir ángulo en tercias ordenadas de puntos. De nuevo refiriéndose al ángulo que ya definimos entre vectores (haciendo que el punto de enmedio sea como el orígen)

$$\angle \mathbf{xyz} := \operatorname{ang}\left((\mathbf{x}-\mathbf{y}),(\mathbf{z}-\mathbf{y})\right) = \arccos \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(\mathbf{z}-\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\,|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}\ .$$

Y entonces tenemos:

Teorema 1.11.2 (Pitágoras) *Dados tres puntos* $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ *en* $\mathbb{E}^n$*, se tiene que*

$$d(\mathbf{x},\mathbf{z})^2 = d(\mathbf{x},\mathbf{y})^2 + d(\mathbf{y},\mathbf{z})^2 \quad \Leftrightarrow \quad \angle \mathbf{xyz} = \pi/2$$



□

Para retomar el hilo de la corriente principal del texto, en los siguientes ejercicios vemos cómo con la noción de distancia se pueden reconstruir objetos básicos como segmentos y rayos, que juntos dan las lineas; y delineamos un ejemplo de un espacio métrico que dá un plano con una geometría "rara".

EJERCICIO 1.93 Demuestra esta versión del Teorema de Pitágoras.

EJERCICIO 1.94 Demuestra que el segmento de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ es el conjunto

$$\overline{\mathbf{xy}} = \{\mathbf{z} \mid d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d(\mathbf{z},\mathbf{y})\}\,.$$

EJERCICIO 1.95 Demuestra que el *rayo que parte de* $\mathbf{y}$ *desde* $\mathbf{x}$ (es decir la continuación de la recta por $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ más allá de $\mathbf{y}$) es el conjunto $\{\mathbf{z} \mid d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z}) = d(\mathbf{x},\mathbf{z})\}$.

*EJERCICIO 1.96 (Un ejemplo cotidiano de otro espacio métrico). El plano con la métrica de "*Manhattan*" (en honor de la famosísima y bien cuadriculada ciudad) se define como $\mathbb{R}^2$ con la función de distancia

$$d_m((x_1,x_2),(y_1,y_2)) := |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|\,;$$

pensando que para ir de un punto a otro sólo se puede viajar en dirección horizontal o vertical (como en las calles de una ciudad).

a).- Demuestra que la métrica de manhattan cumple el Teorema 1.11.1.

b).- Dibuja el conjunto de puntos con distancia 1 al orígen; ¿cómo son los círculos?

c).- ¿Cómo son los segmentos (definidos por la distancia como en el ejercicio de arriba)?

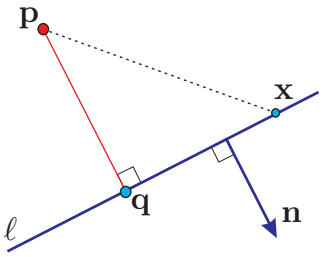
d).- ¿Cómo son los rayos?

1.11.2 Distancia de un punto a una recta

Consideremos el siguiente problema. Nos dan una recta

$$\ell: \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{x} = c$$

y un punto $\mathbf{p}$ (que puede estar fuera o dentro de ella); y se nos pregunta cuál es la distancia de $\mathbf{p}$ a ℓ, que podemos denotar $d(\mathbf{p},\ell)$.



Es más fácil resolverlo si lo pensamos junto con un problema aparentemente más complicado: ¿cuál es el punto de ℓ más cercano a $\mathbf{p}$? Llamémoslo $\mathbf{q} \in \ell$, aunque sea incógnito. El meollo del asunto es que la recta por $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ debe ser ortogonal a ℓ. Es decir, si el segmento $\overline{\mathbf{pq}}$ es ortogonal a ℓ entonces $\mathbf{q}$ es el punto en ℓ más cercano a $\mathbf{p}$. Para demostrarlo considérese cualquier otro punto $\mathbf{x} \in \ell$ y el triángulo rectángulo $\mathbf{x},\mathbf{q},\mathbf{p}$ y apliquése el Teorema de Pitágoras para ver que $d(\mathbf{x},\mathbf{p}) \geq d(\mathbf{q},\mathbf{p})$. Como la dirección ortogonal a ℓ es precisamente $\mathbf{n}$, entonces debe existir $t \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{q} - \mathbf{p} = t\,\mathbf{n}$. La nueva incógnita t nos servirá para medir la distancia de $\mathbf{p}$ a ℓ. Tenemos entonces que nuestras incógnitas $\mathbf{q}$ y t cumplen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{n}\cdot\mathbf{q} &= c \\ \mathbf{q} - \mathbf{p} &= t\,\mathbf{n}\,, \end{aligned}$$

la primera dice que $\mathbf{q} \in \ell$ y la segunda que el segmento $\overline{\mathbf{pq}}$ es ortogonal a ℓ.

Tomando el producto interior de $\mathbf{n}$ con la segunda ecuación, obtenemos

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{q} - \mathbf{n}\cdot\mathbf{p} = t(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}) \ .$$

De donde, sustituyendo la primera ecuación, se puede despejar t (pues $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$) en puros términos conocidos:

$$t = \frac{c - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}} \ .$$

De aquí se deduce que

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{p} + \left(\frac{c - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\right)\mathbf{n} \\ d(\mathbf{p},\ell) &= |t\,\mathbf{n}| = |t|\,|\mathbf{n}| \\ &= \frac{|c - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})|}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}|}\,|\mathbf{n}| = \frac{|c - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})|}{|\mathbf{n}|} \ . \end{aligned}$$

Puesto que sólo hemos usado las propiedades del producto interior, y la norma, sin ninguna referencia a las coordenadas, podemos generalizar a $\mathbb{R}^3$; o bien a $\mathbb{R}^n$ pensando que un *hiperplano* (definido por una ecuación lineal $\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} = c$) es una recta cuando $n = 2$ y es un plano cuando $n = 3$.

Proposicion 1.11.1 *Sea Π un hiperplano en $\mathbb{R}^n$ dado por la ecuación $\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} = c$, y sea $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ cualquier punto. Entonces*

$$d(\mathbf{p},\Pi) = \frac{|c - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})|}{|\mathbf{n}|} \ ,$$

y la proyección ortogonal de $\mathbf{p}$ sobre Π (es decir, el punto más cercano a $\mathbf{p}$ en Π) es

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} + \left(\frac{c - \mathbf{n}\cdot\mathbf{p}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\right)\mathbf{n} \ .$$

EJERCICIO 1.97 Evalua las dos fórmulas del teorema anterior cuando $\mathbf{p} \in \Pi$.

EJERCICIO 1.98 Encuentra una expresión para $d(\mathbf{p},\ell)$ cuando $\ell = \{\mathbf{q} + t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

EJERCICIO 1.99 Demuestra que la fórmula de la distancia de un punto a un plano obtenida en el Ejercicio 1.10.2 coincide con la de la Proposición 1.11.1.

EJERCICIO 1.100 Encuentra la distancia del punto ... a la recta ... y su proyección ortogonal.

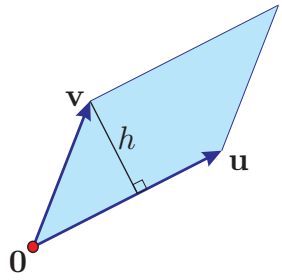
1.11.3 El determinante como área dirigida

No estamos en posición de desarrollar una teoría general de la noción de área, se requieren ideas de cálculo para eso. Pero sí podemos trabajarla para figuras simples como triángulos y paralelogramos. Se define *área* de un paralelogramo de manera euclidiana (como en secundaria), es decir, $(base) \times (altura)$. Veremos que se cálcula con un viejo conocido.

Nos encontramos primero al determinante asociado a sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Despues, definimos el determinante de dos vectores en $\mathbb{R}^2$, otra vez por sistemas de ecuaciones y vimos que detecta (cuando es cero) el paralelismo. Ahora podemos darle una interpretación geométrica en todos los casos.

Teorema 1.11.3 *Sean* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *dos vectores cualesquiera en* $\mathbb{R}^2$. *El área del paralelogramo que definen* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *es* $|\det(\mathbf{u},\mathbf{v})|$. *Además* $\det(\mathbf{u},\mathbf{v}) \geq 0$ *cuando el movimiento angular más corto de* $\mathbf{u}$ *a* $\mathbf{v}$ *es positivo (* $\overrightarrow{\text{ang}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in [0,\pi]$*) y* $\det(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq 0$ *cuando* $\overrightarrow{\text{ang}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in [-\pi,0]$.

Demostración. Podemos tomar como base del paralelogramo en cuestión al vector $\mathbf{u}$, es decir, $(base)$ en la fórmula $(base)\times(altura)$ es $|\mathbf{u}|$, y suponemos que $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. La áltura, h digamos, es entonces la distancia de $\mathbf{v}$, pensado como punto, a la recta ℓ generada por $\mathbf{u}$. Esta recta tiene ecuación normal $\mathbf{u}^\perp \cdot \mathbf{x} = 0$. Entonces, por el teorema anterior se tiene que

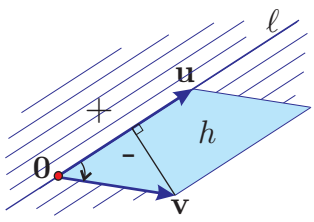


$$h = \frac{\left|0 - \left(\mathbf{u}^\perp \cdot \mathbf{v}\right)\right|}{|\mathbf{u}^\perp|} = \frac{\left|\mathbf{u}^\perp \cdot \mathbf{v}\right|}{|\mathbf{u}|} \ .$$

Al multiplicar por la base se obtiene que el área del paralelogramo es el valor absoluto del determinante

$$\frac{\left|\mathbf{u}^\perp \cdot \mathbf{v}\right|}{|\mathbf{u}|}\,|\mathbf{u}| = \left|\mathbf{u}^\perp \cdot \mathbf{v}\right| = |\det(\mathbf{u},\mathbf{v})| \ .$$

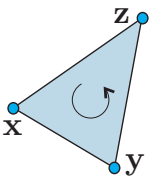
Para ver lo que significa el signo de $\det(\mathbf{u},\mathbf{v})$, obsérvese que la recta ℓ, generada por $\mathbf{u}$, parte al plano en dos *semiplanos*. En uno de ellos se encuentra su compadre ortogonal $\mathbf{u}^\perp$, este es el lado *positivo*, pues al tomar $c \geq 0$ las ecuaciones $\mathbf{u}^\perp \cdot \mathbf{x} = c$ definen rectas paralelas a ℓ, y una de ellas (cuando $c = \left|\mathbf{u}^\perp\right|^2 > 0$) pasa por $\mathbf{u}^\perp$; como estas rectas llenan (ashuran) todo ese semiplano, entonces $\mathbf{u}^\perp \cdot \mathbf{v} \geq 0$ si y sólo si $\mathbf{v}$ esta en el lado positivo de ℓ. Analogamente, $\mathbf{u}^\perp \cdot \mathbf{v} < 0$ si y sólo si $\mathbf{v}$ esta en el mismo lado de ℓ que $-\mathbf{u}^\perp$, que llamamos el lado *negativo.*



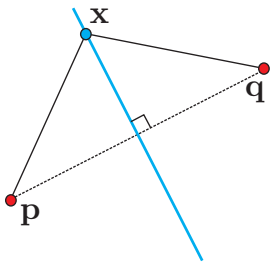
□

De tal manera que el determinante es una "área signada", no sólo nos da el área sino que también nos dice si los vectores están orientados positiva o negativamente. Obsérvese que nuestra manera de detectar paralelismo corresponde entonces a que el área es cero (que el paralelogramo en cuestión es unidimensional).

EJERCICIO 1.101 El área signada de un triángulo *orientado* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ se debe definir como $\det\left((\mathbf{y}-\mathbf{x}), (\mathbf{z}-\mathbf{x})\right)$. Demuestra que sólo depende del orden cíclico en que aparecen los vértices, es decir, que da lo mismo si tomamos como ternas a $\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}$ o a $\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$. Pero que es su inverso aditivo si tomamos la otra orientación $\mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{x}$ para el triángulo.



1.11.4 La mediatriz



Cuando empezemos a estudiar las curvas cónicas, las definiremos como *lugares geométricos* de puntos que cumplen una cierta propiedad que involucra distancias. Así que para terminar este capítulo veremos los ejemplos más sencillos.

¿Dados dos puntos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ ($\in \mathbb{R}^2$) cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ellos? Es decir, hay que describir al conjunto

$$\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = d(\mathbf{q}, \mathbf{x})\right\} .$$

Desarrollando la ecuación $d(\mathbf{p}, \mathbf{x})^2 = d(\mathbf{q}, \mathbf{x})^2$, que equivale a la anterior pues las distancias son positivas, tenemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}-\mathbf{x})\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{x}) &= (\mathbf{q}-\mathbf{x})\cdot(\mathbf{q}-\mathbf{x}) \\ \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} - 2(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}) + \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} &= \mathbf{q}\cdot\mathbf{q} - 2(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}) + \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} \\ \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} - \mathbf{q}\cdot\mathbf{q} &= 2(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x} \end{aligned}$$

que se puede reescribir como

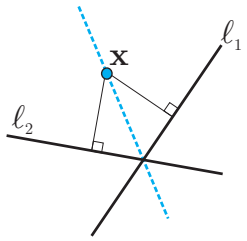
$$(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x} = (\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot(\frac{1}{2}(\mathbf{p}+\mathbf{q})) .$$

Y esta es la ecuación normal de la recta ortogonal al segmento $\overline{\mathbf{pq}}$ y que lo intersecta en su punto medio, llamada la *mediatriz* de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$.

EJERCICIO 1.102 ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos en $\mathbb{R}^3$ que equidistan de dos puntos? Describe la demostración.

1.11.5 Bisectrices y ecuaciones unitarias

Preguntamos ahora cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas ℓ_1 y ℓ_2. De todas las ecuaciones normales que definen a estas rectas, conviene escoger una donde el vector normal es unitario para que las distancias sean más fáciles de expresar. Tal ecuación se llama *unitaria* y se obtiene de cualquier ecuación normal dividiendo —ambos lados de la ecuación, por supuesto— entre la norma del vector normal. Sean entonces $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{S}^1$ y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que para $i = 1, 2$



$$\ell_i : \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{x} = c_i$$

Por la fórmula de la Sección 1.11.2 se tiene entonce que los puntos $\mathbf{x}$ que equidistan de ℓ_1 y ℓ_2 son presisamente los que cumplen con la ecuación

$$|\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{x} - c_1| = |\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{x} - c_2|$$

Ahora bien, si el valor absoluto de dos números reales coincide entonces o son iguales o son inversos aditivos, lo cuál se expresa elegantemente de la siguiente manera:

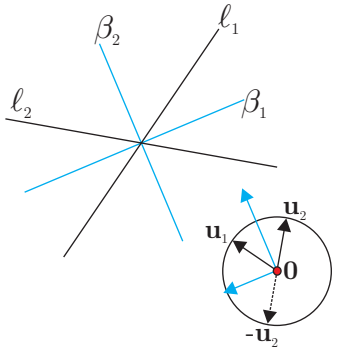
$$|a| = |b| \quad \Leftrightarrow \quad (a+b)\,(a-b) = 0$$

Que, aplicado a nuestra ecuación anterior, nos dice que el lugar geométrico que estamos buscando esta determinado por la ecuación

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{x} - c_1 + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{x} - c_2)\,(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{x} - c_1 - \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{x} + c_2) &= 0 \\ ((\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{x} - (c_1 + c_2))\,((\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{x} - (c_1 - c_2)) &= 0 \end{aligned}$$

Como cuando el producto de dos números es cero alguno de ellos lo es, entonces nuestro lugar geométrico es la unión de las dos rectas:

$$\begin{aligned} \beta_1 &: (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{x} = (c_1 + c_2) \\ \beta_2 &: (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{x} = (c_1 - c_2) \end{aligned} \tag{1.12}$$



que son las *bisectrices* de las lineas ℓ_1 y ℓ_2. Observemos que son ortogonales pues

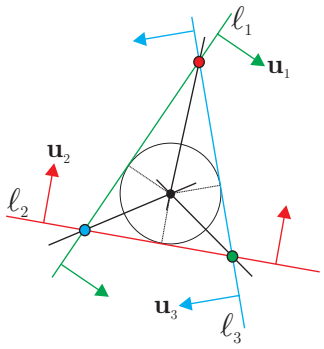
$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) &= |\mathbf{u}_1|^2 - |\mathbf{u}_2|^2 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

y geométricamente, bisectan a los dos sectores o ángulos que forman las rectas; también pasan por el punto de intersección pues sus ecuaciones se obtienen sumando y restando las ecuaciones originales (el caso en que sean paralelas se deja como ejercicio). En el círculo unitario tambien es claro que la suma y la diferencia de dos vectores (aunque ya no sean necesariamente unitarios) tienen los ángulos adecuados.

Como corolario, obtenemos otro de los Teoremas clásicos de concurrencia.

Teorema 1.11.4 *Las bisectrices (internas) de un triángulo son concurrentes.*

Demostración. Sólo hay que tener cuidado con cuáles ecuaciones unitarias trabajamos, pues hay dos posibles para cada recta. Si escogemos los vectores unitarios de las tres rectas, ℓ_1,ℓ_2 y ℓ_3 digamos, apuntando hacia adentro del triángulo, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ respectivamente, entonces es claro que sus sumas son normales a las bisectrices exteriores. El teorema habla entonces de las bisectrices que se obtienen como diferencias, que son, numerándolas por el indice de la recta opuesta:



$$\begin{aligned} \beta_1 &: (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3) \cdot \mathbf{x} = (c_2 - c_3) \\ \beta_2 &: (\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{x} = (c_3 - c_1) \\ \beta_3 &: (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{x} = (c_1 - c_2) \end{aligned}$$

El negativo de cualquiera de ellas se obtiene sumando a las otras dos.

□

EJERCICIO 1.103 Un argumento aparentemente más elemental para el Teorema anterior es que si un punto está en la intersección de dos bisectrices entonces ya equidista de las tres rectas y por tanto también está en la bisectriz del vertice restante. ¿Qué implica este argumento cuando tomamos bisectrices exteriores? ¿Con quién concurren dos bisectrices exteriores? ¿Una interior y una exterior? Da enunciados y demuestralos con ecuaciones normales. Completa el dibujo.

EJERCICIO 1.104 Demuestra que el lugar geométrico de los puntos que equidistan a dos rectas paralelas es la paralela a ambas que pasa por el punto medio de sus intersecciones con una recta no paralela a ellas, a partir de las ecuaciones (1.12).

EJERCICIO 1.105 ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos planos en $\mathbb{R}^3$? Describe una demostración de tu aseveración.

1.12 *Los espacios de rectas en el plano

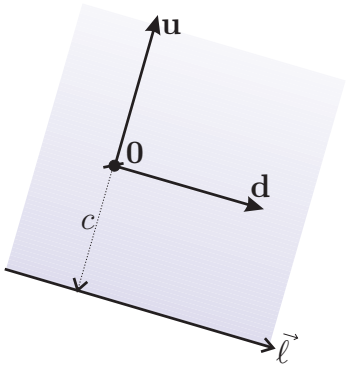
En esta Sección extra, independiente hasta cierto punto del texto principal ulterior, estudiamos dos ejemplos, que ya tenemos muy a la mano, de cómo la noción

de El Espacio, que por milenios se considero única y amorfa —"el espacio en que vivimos"— se pluraliza a los espacios. Ya vimos que El Espacio teórico que consideraron los griegos es sólo la instancia en dimensión 3 de la familia de espacios euclidianos $\mathbb{E}^n$; pero además la *pluralización* (pasar de uno a muchos) se da en otro sentido. En matemáticas, y en particular en la geometría, surgen naturalmente otros conjuntos, además de los $\mathbb{E}^n$, con plenos derechos a ser llamados "espacios". Los dos "espacios"[4] que nos ocupan ahorita son los de rectas en el plano. Consideraremos cada recta como un punto de un nuevo "espacio" y puesto que intuitivamente podemos decir si dos rectas son cercanas o no, en este nuevo "espacio" sabremos si dos puntos lo estan. La idea clave está en que, así como a los puntos del plano euclidiano clásico Descartes les asoció parejas de números, a las rectas del plano también les hemos asociado númeritos: los involucrados en sus ecuaciones.

En el Ejercicio 1.8.1 de la Sección 8, se hizo notar que a cada terna de números $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, con $(a, b) \neq (0, 0)$, se le puede asociar una recta en $\mathbb{R}^2$, a saber, la definida por la ecuación $ax + by = c$; y el estudiante debía demostrar que los planos por el origen en $\mathbb{R}^3$ corresponden a los haces de rectas en el plano. En esta última sección abundaremos en estas ideas. Se puede decir que la pregunta que nos guia es ¿cuántas rectas hay en $\mathbb{R}^2$?, pero el "cuántas" es demasiado impreciso. Veremos que las rectas de $\mathbb{R}^2$ forman algo que llamaremos el "espacio" de rectas, y para esto les daremos "coordenadas" explicitas, muy a semejanza de las coordenadas polares para los puntos.

1.12.1 Rectas orientadas

Consideremos primero a las rectas orientadas en $\mathbb{R}^2$ pues a ellas se les puede asociar un vector normal (y por tanto una ecuación) de manera canónica. Una *recta orientada* es una recta $\vec{\ell}$ junto con una orientación preferida, que nos dice la manera *positiva* de viajar en ella. Entonces, de todos sus vectores direccionales podemos escoger al unitario $\mathbf{d}$ con la orientación positiva y como vector normal, escogemos al compadre ortogonal de éste; es decir, al vector unitario tal que despues de la orientación de la recta nos da la orientación positiva del plano. Así, cada recta orientada está definida por una ecuación *unitaria* única



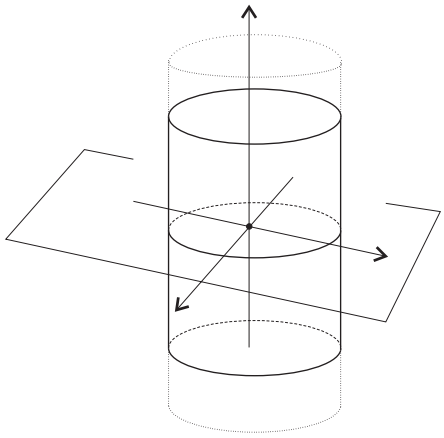
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = c$$

dónde $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^1$, y $c \in \mathbb{R}$ es su distancia orientada al origen.

A cada recta orientada se le puede asociar su semiplano positivo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} \geq c$; así que también podemos pensar a las rectas orientadas como los semiplanos.

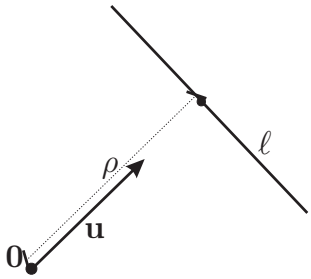
[4] Mantenemos las comillas pues la noción aún no esta bien definida, va en la dirección de lo que ahora se llama Topología.

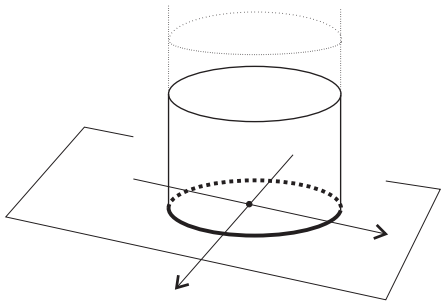
Puesto que esta ecuación unitaria es única (por la orientación) entonces hay tantas rectas orientadas como parejas $(\mathbf{u}, c) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, y este conjunto es claramente un cilindro vértical en $\mathbb{R}^3$. Los haces de lineas orientadas paralelas corresponden a lineas vérticales en el cilindro, pues en estos haces el vector normal esta fijo. Y los haces de lineas (orientadas) concurrentes corresponden a lo que corta un plano por el origen al cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, que es una elipse.

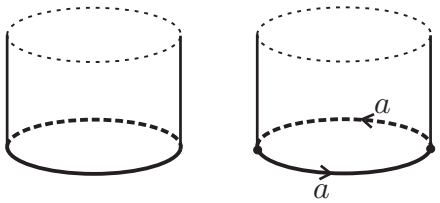


1.12.2 Rectas no orientadas

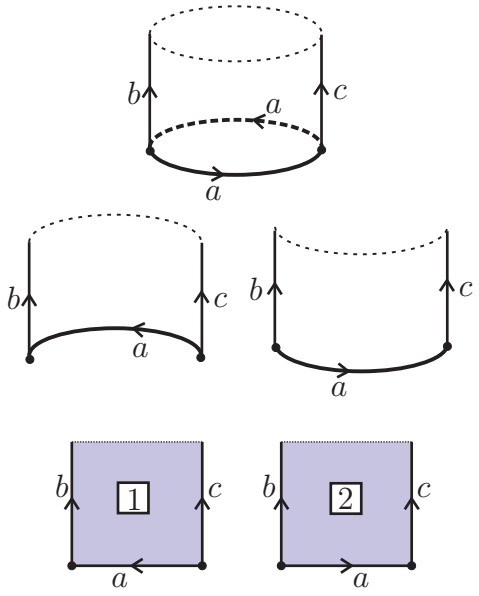
Las dos orientaciones de una recta ℓ, tienen ecuaciones unitarias $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = c$ y $(-\mathbf{u}) \cdot \mathbf{x} = -c$. Si la recta no pasa por el origen (si $\mathbf{0} \notin \ell$ y por tanto $c \neq 0$), de estas dos ecuaciones unitarias podemos tomar la ecuación con constante estrictamente positiva, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = \rho$, con $\rho > 0$, digamos. Así que las "coordenadas" $(\mathbf{u}, \rho)$ corresponden a las coordenadas polares del punto en la recta ℓ más cercano al origen; y viceversa, a cada punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ se le asocia la recta que pasa por el punto $\mathbf{x}$ y es normal al vector $\mathbf{x}$. O dicho de otra manera, si la recta ℓ no contiene al origen, podemos escoger el semiplano que define que no contiene a $\mathbf{0}$. Nos queda una ambigüedad en el origen: para las rectas por él tenemos dos vectores unitarios normales que definen la misma recta. Podemos resumir que las rectas en $\mathbb{R}^2$ corresponden a los puntos de un cilindro "semicerrado" $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_+$ (donde $\mathbb{R}_+ = \{\rho \in \mathbb{R} \mid \rho \geq 0\}$) donde hay que identificar su frontera por antipodas, es decir, en este conjunto $(\mathbf{u}, 0)$ y $(-\mathbf{u}, 0)$ aún representan a la misma recta. Si identificamos a $(\mathbf{u}, 0)$ con $(-\mathbf{u}, 0)$ en el cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_+$, se obtiene una banda de Moebius abierta. Veámos:



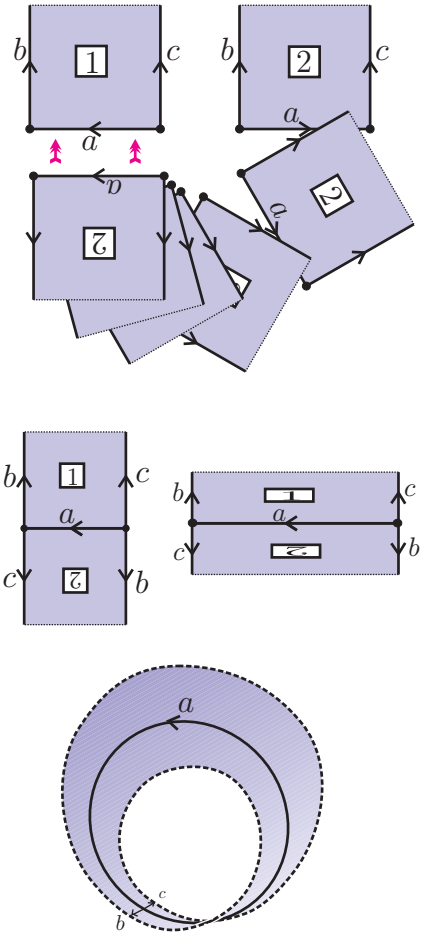




Hay que pensar que el cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_+$ está hecho de un material flexible (pensarlo como "espacio topológico", se dice actualmente), y hacer chiquito al factor $\mathbb{R}_+$, para tener un cilindrito con una de sus fronteras inexistente (la que corresponde al infinito) denotada en las figuras como linea punteada. En la otra frontera (que corresponde al 0) debemos pegar puntos antipodas. Llamémos a al segmento dirigido que es la mitad de ese círculo y entonces la otra mitad, con la misma orientación del círculo, vuelve a ser a.



Si tratamos de pegarlas directamente, la superficie del cilindro nos estorba y no se ve qué pasa con claridad. Conviene entonces cortar al cilindro por los segmentos verticales, denotados b y c en la figura, sobre el principio y fin de a, para obtener dos cuadraditos (1 y 2). Estos segmentos están dirigidos y debemos recordar que hay que volverlos a pegar en su momento. Ahora sí, podemos pegar a los segmentos a recordando su dirección. En la última figura volteamos al cuadrado 2 de cabeza para lograrlo. Si alargamos al rectángulo en su dirección horizontal, obtenemos una banda en la cual hay que identificar las fronteras verticales hechas con los pares de segmentos b y c (la frontera horizontal sigue siendo punteada). Y esta identificación, según nuestros segmentos dirigidos, es invirtiendo la orientación, hay que dar media vuelta para pegarlos, asi que nos da una banda de Moebius quitándole su frontera, y ya no queda nada por identificar. Hemos demostrado que las rectas del plano corresponden biyectivamente a los puntos de una banda de Moebius abierta. Obsérvese además que las rectas por el origen (el segmento a con sus extremos identificados) quedan en el "corazón" (el círculo central) de la banda de Moebius; los haces paralelos corresponden a los intervalos abiertos transversales al corazón que van de la frontera a sí misma (el punto de intersección con el corazón es su representante en el origen). ¿A qué corresponden los haces concurrentes?

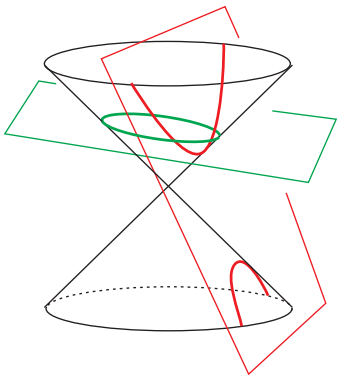


EJERCICIO 1.106 Demuestra que dos haces de rectas, no ambos haces paralelos, tienen una única recta en comun.

Capítulo 2

Cónicas I (presentación)

Las cónicas son una familia de curvas famosas que definieron los griegos. De ellas, la que vemos cientos de veces al dia es a la elípse. Al ver la boca de un vaso, una taza o una vasija, o bien, la llanta de un coche, vemos una *elípse* e inmediatamente intuimos que en realidad se trata de un círculo, sólo que lo estamos viendo "de ladito". Unicamente vemos un círculo cuando la proyección ortogonal de nuestro ojo al plano en el que vive el círculo es justo su centro; así que los cientos de círculos que vemos a diario son nuestra deducción cerebral automática de las elípses que en realidad percibimos. Para fijar ideas, pensemos que vemos una taza sobre una mesa con un sólo ojo, cada punto de su borde define una recta a nuestro ojo por donde viaja la luz que percibimos, todas estas rectas forman un *cono* con *ápice* en el punto ideal de nuestro ojo; pero no es un cono circular sino un cono elíptico: más apachurrado entre más cerca esté nuestro ojo al plano de la boca de la taza, y más circular en cuanto nuestro ojo se acerca a verlo desde arriba. Resulta entonces que si a este cono elíptico lo cortamos con el plano de la boca de la taza nos da un círculo (precisamente, la boca de la taza). Los griegos intuyeron que entonces, al reves, la elípse se puede definir cortando conos circulares (definidos en base al círculo que ya conocían) con planos inclinados.



Hoy día lo podemos decir de otra manera: si prendemos una lampara de mano, de ella emana un cono circular de luz; es decir, si la apuntamos ortogonalmente a una pared se ilumina un círculo (con todo y su interior), al girar un poquito la lampara, el círculo se deforma en una elípse que es un plano (la pared) cortando a un cono circular (el haz de luz). Entre más inclinada esté la lampara respecto a la pared, la elípse se alarga (como boca de taza con el ojo casi al raz) hasta que algo de la luz sale de la pared. Pensemos entonces que la pared es infinita (un plano) y que nuestra lampara es infinitamente potente (un cono perfecto); al girar más la lampara, la elípse se sigue alargando y alargando hasta el momento en que uno de los rayos del cono no toca a la pared (es paralelo a ella). Justo en ese instante, el borde de lo iluminado

en la pared es una *parábola*, y de allí en adelante, al continuar el giro, es una *rama de hipérbola*. La *hipérbola* completa se obtiene al pensar que los rayos del cono son rectas completas, que se continuan hacia atrás de la lampara, y entonces algunas de estas rectas (cuyos rayos de luz ya no tocan a la pared por adelante) la intersectan por atrás en la otra rama de la hipérbola. Si continuamos el giro, pasamos de nuevo por una parábola y luego por elípses que, viniendo de atrás, se redondean hasta el círculo con el que empezamos, pero ahora dibujado por el haz de rayos "hacía atrás" de la lampara que giro 180°. La definición clásica de los griegos, que es equivalente, es fijando al cono y moviendo al plano, y de allí que las hallan llamado *secciones cónicas* o simplemente *cónicas*: la intersección de planos con conos circulares (completos).

La escuela de Alejandría?? estudio con profundidad a estas curvas. Lo hicieron por amor al arte, al conocimiento, abstracto y puro, por la intuición matemática de su propia belleza y naturalidad; y dieron a la humanidad una lección fundamental de la importancia que tiene la ciencia básica. Pues resultó, casí dos mil años despues, que estas curvas teóricas se expresaban en la naturaleza como las orbitas de los planetas (elípses descritas por Kepler) o en las trayectorias de los proyectiles (parábolas descritas por Newton y predecesores). Sus propiedades focales, que también descubrieron los griegos, se usan hoy cotidianamente en las antenas parabólicas, en los telescopios y en el diseño de reflectores o de las lentes de anteojos o cámaras. Su teoría, que parecía ser un divertimento totalmente abstracto, resultó importantísimo en la vida diaria y en el entendimiento de la naturaleza.

La escuela de Alejandría??, demostró que a las cónicas también se les puede definir intrinsecamente como *lugares geométricos* en el plano, es decir, como subconjuntos de puntos que cumplen cierta propiedad; a saber, una propiedad que se expresa en términos de distancias. Esta será la definición formal que usaremos en el libro y en la última sección de este capítulo veremos que coincide con el de secciones cónicas. En las primeras secciones veremos que su definición como lugares geométricos expresados en términos de distancias es equivalente a su descripción como el lugar geométrico de puntos en $\mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas satisfacen cierta ecuación. Resulta que estas ecuaciones son ecuaciones cuadráticas en dos variables, x y y (las coordenadas). Este hecho, que observó el propio Descartes, fué una gran motivación para el surgimiento de su Geometría Analítica, pues relacionaba a las clásicas secciones cónicas con los polinomios de segundo grado, y en general el Algebra, que habían desarrollado los arabes.

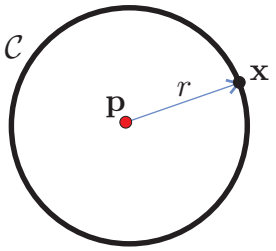
2.1 Círculos

Ya hemos definido y usado extensamente al círculo unitario $\mathbb{S}^1$, definido por la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Consideremos ahora a cualquier otro círculo $\mathcal{C}$. Tiene un *centro* $\mathbf{p} = (h, k)$, un *radio* $r > 0$, y es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a $\mathbf{p}$ es r. Es decir, $\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = r\}$; o bien, C está definido por la ecuación

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = r. \tag{2.1}$$



Puesto que ambos lados de esta ecuación son positivos, es equivalente a la igualdad de sus cuadrados que en coordenadas toma la forma

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2. \tag{2.2}$$

De tal manera que todos los círculos de $\mathbb{R}^2$ están determinados por una ecuación cuadrática en las variables x y y. Cuando la ecuación tiene la forma anterior, podemos "leer" toda la información geométrica (el centro y el radio). Pero en general viene disfrazada como

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky = \left(r^2 - h^2 - k^2\right)$$

que es, claramente, su expresión desarrollada. Veámos un ejemplo.

Considerémos la ecuación

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y = -6. \tag{2.3}$$

Para ver si define un círculo, y cuál, hay que tratar de escribirla en la forma (2.2). Para esto hay que "completar" los cuadrados sumando (en ambos lados) las constantes que faltan

$$\begin{aligned} \left(x^2 - 6x + 9\right) + \left(y^2 + 2y + 1\right) &= -6 + 9 + 1 \\ (x - 3)^2 + (y + 1)^2 &= 4. \end{aligned}$$

Es claro que al desarrollar esta ecuación obtenemos a la original, de tal manera que aquella define al círculo con centro en $(3, -1)$ y radio 2.

También podemos expresar a la ecuación de un círculo de manera vectorial, pues el círculo $\mathcal{C}$ con centro $\mathbf{p}$ y radio r está claramente definido por la ecuación

$$(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = r^2, \tag{2.4}$$

que es el cuadrado de (2.1). Esta ecuación, que llamaremos la *ecuación vectorial del círculo,* se puede también reescribir como

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = r^2.$$

Parece superfluo pero tiene grandes ventajas. Por ejemplo, en algunos de los ejercicios siguientes puede ayudar, pero además, y mucho más profundo, al no hacer referencia a las coordenadas tiene sentido en cualquier dimensión. Sirve entonces para

definir esferas en $\mathbb{R}^3$ y, como veremos en el siguiente parrafo (en el que vale la pena que el estudiante tenga en mente cómo traducir a $\mathbb{R}^3$, esferas y planos), de la ecuación vectorial se puede extraer mucha información geométrica interesante.

Debemos también remarcar que en las siguientes secciones donde empezamos a estudiar las otras cónicas no aparece el equivalente a esta ecuación vectorial del círculo. Para lograrlo en general nos falta desarrollar mucho más teoría.

EJERCICIO 2.1 ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son ecuaciones de un círculo? Y en su caso, ¿de cuál?

$x^2 - 6x + y^2 - 4y = 12$
$x^2 + 4x + y^2 + 2y = 11$
$2x^2 + 8x + 2y^2 - 4y = -8$
$x^2 - 4x + y^2 - 2y = -6$
$4x^2 + 4x + y^2 - 2y = 4$

EJERCICIO 2.2 ¿Cuál es el lugar geométrico de los centros de los círculos que pasan por dos puntos (distintos) $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$?

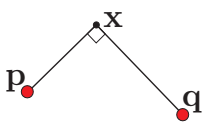
EJERCICIO 2.3 Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ dos puntos (distintos) en el plano; y sean $\mathcal{C}_1$ el círculo con centro $\mathbf{a}$ y radio r_1 y $\mathcal{C}_2$ el círculo con centro $\mathbf{b}$ y radio r_2. Demuestra que $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son *tangentes* (i.e. se intersectan en un único punto) si y sólo si $r_1 + r_2 = d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ o $r_1 + d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = r_2$ o $r_2 + d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = r_1$. ¿A qué corresponden geométricamente las tres condiciones anteriores; haz un dibujo de cada caso?

EJERCICIO 2.4 Dados los círculos como en el ejercicio anterior, da condiciones sobre sus radios y la distancia entre sus centros para que:

a) el círculo $\mathcal{C}_1$ esté contenido en el interior del círculo $\mathcal{C}_2$.
b) el círculo $\mathcal{C}_1$ esté contenido en el exterior del círculo $\mathcal{C}_2$ (y viceversa).
c) el círculo $\mathcal{C}_1$ y el círculo $\mathcal{C}_2$ se intersecten en dos puntos.

EJERCICIO 2.5 Demuestra que por tres puntos no colineales $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ pasa un único círculo, llamado el *circuncírculo* del triángulo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

EJERCICIO 2.6 Demuestra que dadas tres lineas no concurrentes y no paralelas dos a dos existen exactamente cuatro círculos tangentes a las tres; al que esta contenido en el interior del triángulo se le llama su *incírculo*.



EJERCICIO 2.7 Sean $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ dos puntos distintos en el plano (o en $\mathbb{R}^3$). Demuestra que el conjunto de puntos cuyas lineas por $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ son ortogonales, es un círculo (o una esfera) que "quiere contener" a $\mathbf{p}$ y a $\mathbf{q}$. Más precisamente, que el conjunto definido por la ecuación

$$(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{q}) = 0$$

es el círculo con el segmento $\overline{\mathbf{pq}}$ como diametro. *(Echale un ojo al ejercicio siguiente).*

EJERCICIO 2.8 Sean $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ dos puntos distintos en el plano. ¿Para cuáles números reales c, se tiene que la ecuación

$$(\mathbf{x}-\mathbf{p})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{q}) = c$$

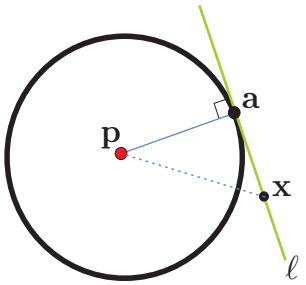
define un círculo? En su caso, ¿cuál es el radio y dónde está su centro?

2.1.1 Tangentes y polares

Observemos primero que las líneas *tangentes* a un círculo son las normales a los *radios* (los segmentos del centro a sus puntos). Efectivamente, si $\mathbf{a}$ es un punto del círculo $\mathcal{C}$ dado por la ecuación vectorial

$$(\mathbf{x}-\mathbf{p})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{p}) = r^2 \tag{2.4}$$

entonces su tangente es la recta ℓ normal a $(\mathbf{a}-\mathbf{p})$ y que pasa por $\mathbf{a}$. Pues $\mathbf{a}$ es el punto más cercano a $\mathbf{p}$ en esta recta, de tal manera que para cualquier otro punto $\mathbf{x} \in \ell$ se tiene que $d(\mathbf{x},\mathbf{p}) > r$. Como el círculo $\mathcal{C}$ parte al plano en dos pedazos (el *interior* donde $d(\mathbf{x},\mathbf{p}) < r$, y el *exterior* donde $d(\mathbf{x},\mathbf{p}) > r$), entonces ℓ está contenida en el exterior salvo por el punto $\mathbf{a} \in \mathcal{C}$; esta será nuestra definición de *tangente*.



Claramente, la recta ℓ está dada por la ecuación

$$\mathbf{x}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{p}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{p}),$$

que tiene una manera mucho más interesante de escribirse. Restando $\mathbf{p}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{p})$ a ambos lados se obtiene

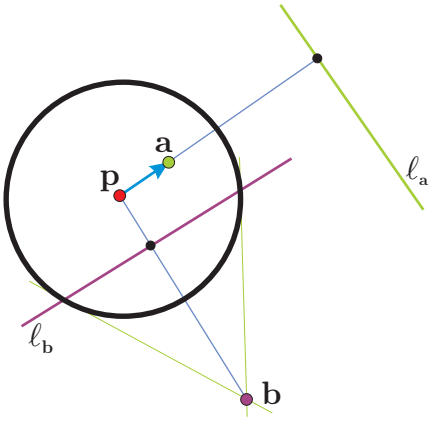
$$\begin{aligned} \mathbf{x}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{p}) - \mathbf{p}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{p}) &= \mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{p}) - \mathbf{p}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{p}) \\ (\mathbf{x}-\mathbf{p})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{p}) &= (\mathbf{a}-\mathbf{p})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{p}) \\ (\mathbf{x}-\mathbf{p})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{p}) &= r^2 \end{aligned}$$

pues $\mathbf{a} \in \mathcal{C}$. La ecuación de la tangente se obtiene entonces sustituyendo al punto en una de las dos apariciones de la variable $\mathbf{x}$ en la ecuación vectorial (2.4).

Para cualquier otro punto en el plano, $\mathbf{a}$ digamos, que no sea el centro ($\mathbf{a} \neq \mathbf{p}$), el mismo proceso algebráico –sustituir $\mathbf{a}$ en una de las instancias de $\mathbf{x}$ en la ecuación vectorial– nos da la ecuación de una recta, llamada *la polar* de $\mathbf{a}$ respecto al círculo $\mathcal{C}$, y que denotaremos $\ell_{\mathbf{a}}$; es decir,

$$\text{sea} \quad \ell_{\mathbf{a}}: \quad (\mathbf{x}-\mathbf{p})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{p}) = r^2 \tag{2.5}$$

Ya hemos visto que cuando $\mathbf{a} \in \mathcal{C}$, su polar $\ell_{\mathbf{a}}$ es su tangente. Ahora veremos que si $\mathbf{a}$ está en el interior del círculo, entonces $\ell_{\mathbf{a}}$ no lo intersecta (está totalmente contenida en el exterior), y que si está en el exterior (el punto $\mathbf{b}$ en la figura) entonces lo corta, y además lo corta en los dos puntos de $\mathcal{C}$ a los cuales se pueden trazar tangentes.



Para esto, expresemos la ecuación de $\ell_{\mathbf{a}}$ en su forma normal; desarrollando (2.5) se obtiene:

$$\mathbf{x}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{p}) = r^2 + \mathbf{p}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{p}).$$

Lo cual indica que $\ell_{\mathbf{a}}$ es perpendicular al vector que va de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{a}$. Ahora veamos quién es su punto de intersección con la recta que pasa por $\mathbf{p}$ y $\mathbf{a}$. Parametrizémos a esta última recta con $\mathbf{p}$ de cero y $\mathbf{a}$ de uno (es decir como $\mathbf{p}+t(\mathbf{a}-\mathbf{p})$) y al sustituir en la variable de la ecuación anterior (o se ve más directo al sustituir en la (2.5)) podemos despejar t para obtener

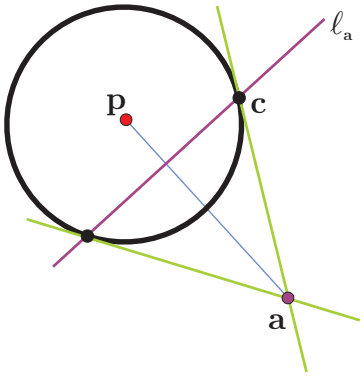
$$t = \frac{r^2}{(\mathbf{a}-\mathbf{p})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{p})} = \frac{r^2}{d(\mathbf{p},\mathbf{a})^2}.$$

Entonces la distancia de $\mathbf{p}$ a $\ell_{\mathbf{a}}$ es

$$d(\mathbf{p},\ell_{\mathbf{a}}) = t\,d(\mathbf{p},\mathbf{a}) = \frac{r^2}{d(\mathbf{p},\mathbf{a})} = \left(\frac{r}{d(\mathbf{p},\mathbf{a})}\right) r \tag{2.6}$$

y tenemos lo primero que queríamos: si $d(\mathbf{p},\mathbf{a}) < r$ entonces $d(\mathbf{p},\ell_{\mathbf{a}}) > r$; y al reves, si $d(\mathbf{p},\mathbf{a}) > r$ entonces $d(\mathbf{p},\ell_{\mathbf{a}}) < r$. Si el punto $\mathbf{a}$ está muy cerca de $\mathbf{p}$, su polar está muy lejos y al reves, sus distancias al centro $\mathbf{p}$ se comportan como inversos pero "alrededor de r" (si $r=1$ son precisamente inversos).

Supongamos ahora que $d(\mathbf{p},\mathbf{a}) > r$, y sea $\mathbf{c}$ un punto en $\ell_{\mathbf{a}} \cap \mathcal{C}$ (que sabemos que existe pues $\ell_{\mathbf{a}}$ pasa por el interior de $\mathcal{C}$). Puesto que $\mathbf{c} \in \ell_{\mathbf{a}}$, se cumple la ecuación



$$(\mathbf{c}-\mathbf{p})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{p}) = r^2.$$

Pero entonces $\mathbf{a}$ cumple la ecuación de $\ell_{\mathbf{c}}$ que es la tangente a $\mathcal{C}$ en $\mathbf{c}$; es decir, la linea de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{c}$ es tangente al círculo.

Nótese que el argumento anterior es mucho más general: demuestra que para cualesquiera dos puntos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ (distintos de $\mathbf{p}$) se tiene que

$$\mathbf{a} \in \ell_{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \mathbf{b} \in \ell_{\mathbf{a}} \tag{2.7}$$

Y los puntos del círculo son los únicos para los cuales se cumple $\mathbf{a} \in \ell_{\mathbf{a}}$.

En particular, hemos aprendido a calcular los puntos de tangencia a un círculo desde un punto exterior $\mathbf{a}$. A saber, de la ecuación lineal de su polar, $\ell_{\mathbf{a}}$, se despeja alguna de las dos variables y se sustituye en la ecuación del círculo. Esto nos da una ecuación de segundo grado en la otra variable que se puede resolver dándonos dos raices. Sustituyéndolas de nuevo en la ecuación de la polar se obtienen el otro par de coordenadas.

Por ejemplo, la ecuación del círculo (2.3) tiene la expresión vectorial

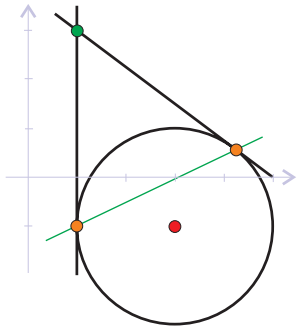
$$((x,y)-(3,-1))\cdot((x,y)-(3,-1))=4.$$

Si queremos conocer los puntos de tangencia desde el punto $\mathbf{a}=(1,3)$, encontramos primero la ecuación de su línea polar:

$$\begin{aligned}((x,y)-(3,-1))\cdot((1,3)-(3,-1)) &= 4\\ (x-3,y+1)\cdot(-2,4) &= 4\\ -2x+4y+10 &= 4\\ x-2y &= 3\end{aligned}$$

De aquí, para encontrar $\ell_{\mathbf{a}}\cap\mathcal{C}$, conviene sustituir $x=3+2y$ en la ecuación original del círculo (2.3) para obtener

$$\begin{aligned}(3+2y)^2+y^2-6(3+2y)+2y &= -6\\ 5y^2+2y-3 &= 0.\end{aligned}$$



Las raices de esta ecuación cuadrática se obtienen por la fórmula clásica:

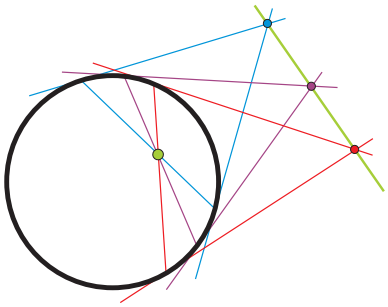
$$y=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{10}=\frac{-2\pm 8}{10}$$

que nos da valores $y_0=-1$ y $y_1=3/5$. Y estos, sustituyendo de nuevo en la ecuación de la polar nos dan los puntos de tangencia de $\mathbf{a}$; que son $(1,-1)$ y $(1/5)(21,3)$. Puede checar el estudiante que satisfacen la ecuación del círculo, aunque los hayamos obtenido (al final) sustituyendo en la ecuación lineal de la polar, y que efectivamente sus tangentes pasan por $\mathbf{a}$.

EJERCICIO 2.9 Encuentra los puntos de tangencia:

a) al círculo $x^2-2x+y^2-4y=-3$ desde el punto $(-1,2)$.

b) al círculo $x^2+y^2=1$ desde el punto $(2,2)$.



EJERCICIO 2.10 Sea σ una secante de un círculo $\mathcal{C}$, es decir un segmento con extremos en el círculo. Si trazamos las tangentes por sus extremos, estas se intersectan en un punto, llamémosle el *polar* de σ. Demuestra que tres secantes son concurrentes si y sólo si sus puntos polares son colineales.

EJERCICIO 2.11 El estudiante que en el ejercicio anterior observó la necesidad formal de eliminar a los diametros en la definición de *punto polar* de un segmento, hizo muy bien; pero el que no se puso quisquilloso y ni cuenta se dió, hizo mejor. Penso proyectivamente. Demuestra que si permitimos que el centro $\mathbf{p}$ entre a nuestras consideraciones anteriores y añadimos puntos "polares" a los diametros que juntos forman la nueva linea $\ell_{\mathbf{p}}$ polar con $\mathbf{p}$, entonces la polaridad se extiende a todas las lineas (falta definirla en las tangentes

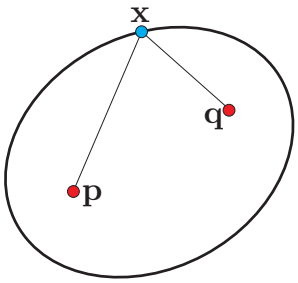
y exteriores) y que es una biyección entre lineas y puntos que cambia concurrencia por colinearidad. Observa además que los nuevos puntos (polares de los diametros) tienen una dirección (no orientada) bien definida, aquella en la que se alejan los puntos polares de una secante que se acerca al diametro correspondiente).

EJERCICIO 2.12 Demuestra que si $\mathbf{c}$ es un punto exterior (al círculo $\mathcal{C}$ con centro $\mathbf{p}$) entonces su recta a $\mathbf{p}$ bisecta a sus dos tangentes a $\mathcal{C}$. Y además que las distancias a sus *pies* en $\mathcal{C}$ (es decir, a los puntos de tangencia) son iguales.

EJERCICIO 2.13 Observa que toda nuestra discusión sobre lineas polares se basó en la ecuación vectorial (2.4) que tiene sentido en $\mathbb{R}^3$ donde define a esferas. Define la noción de plano polar a un punto respecto a una esfera en $\mathbb{R}^3$. Demuestra que un punto $\mathbf{c}$ en el exterior tiene como plano polar a uno que intersecta a la esfera en un círculo formado por los puntos de la esfera cuyas lineas a $\mathbf{c}$ son tangentes (a la unión de estas lineas se le llama el *cono* de la esfera con ápice $\mathbf{c}$).

2.2 Elípses

Si amarramos a un burro hambriento a una estaca en un prado, se irá comiendo el pasto deambulando al azar, pero terminará por dejar pelón al interior de un círculo (con centro la estaca y radio la longitud del mecate). Si amarramos los extremos de un mecate a dos estacas y engarzamos al burro a este mecate lo que dibujará es una elípse; por eso, a fijar dos tachuelas en un papel, amarrar holgadamente un hilo entre ellas y luego tenzar con un lápiz y girarlo se le conoce como "*el método del jardinero*" para trazar elípses. Formalmente, las *elípses* son el lugar geométrico de los puntos (posiciones de la boca del burro cuando tenza el mecate) cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados *focos* (las estacas) es constante (la longitud del mecate). De tal manera que una elípse $\mathcal{E}$ queda determinada por la ecuación



$$d(\mathbf{x},\mathbf{p}) + d(\mathbf{x},\mathbf{q}) = 2a \tag{2.8}$$

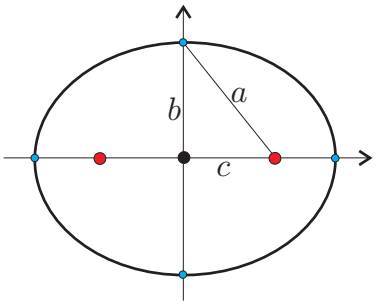
donde $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ son los focos y a es una constante positiva, llamada *semieje mayor*, tal que $2a > d(\mathbf{p},\mathbf{q})$. Incluimos el coeficiente 2 en la constante para que quede claro que si los focos coinciden, $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, entonces se obtiene un círculo de radio a y centro en el foco; así que los círculos son elípses muy especiales. Esta ecuación, poniéndole coordenadas a los focos, incluye raizes cuadradas por las distancias, es aún muy "fea". Veremos ahora que en un caso especial es equivalente a una ecuación cuadrática "bonita".

Supongamos que el *centro* de la elípse $\mathcal{E}$, i.e., el punto medio entre los focos, está en el origen y que además los focos están en el eje x. Entonces tenemos que $\mathbf{p} = (c, 0)$ y $\mathbf{q} = (-c, 0)$ para alguna c tal que $0 < c < a$ (donde ya suponemos que la elípse

no es un círculo al pedir $0 < c$). Es fácil ver que entonces la intersección de $\mathcal{E}$ con el eje x consiste de los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, pues la ecuación (2.8) para puntos $(x, 0)$ es

$$|x - c| + |x + c| = 2a$$

que sólo tiene las soluciones $x = a$ y $x = -a$ (ver Ejercicio 2.2), y de aquí el nombre de "*semieje mayor*" para la constante a. Como el eje y es ahora la mediatriz de los focos, en él, es decir en los puntos $(0, y)$, la ecuación (2.8) se vuelve



$$\sqrt{c^2 + y^2} = a$$

que tiene soluciones $y = \pm b$, donde $b > 0$, llamado el *semieje menor* de la elípse $\mathcal{E}$, es tal que

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

Ahora sí, consideremos la ecuación (2.8), que con $\mathbf{x} = (x, y)$ y la definición de nuestros focos se expresa

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a. \tag{2.9}$$

Si elevamos al cuadrado directamente a esta ecuación, en el lado izquierdo nos quedaría un incomodo término con raices. Así que conviene pasar a una de las dos raices al otro lado, para obtener

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}.$$

Elevando al cuadrado, se tiene

$$\begin{aligned}
(x - c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2 \qquad (2.10)\\
x^2 - 2cx + c^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2\\
4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} &= 4a^2 + 4cx\\
a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} &= a^2 + cx
\end{aligned}$$

Elevando de nuevo al cuadrado, nos deshacemos de la raiz, y despues, agrupando términos, obtenemos

$$\begin{aligned}
a^2\left((x + c)^2 + y^2\right) &= a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \qquad (2.11)\\
a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + 2a^2cx + c^2x^2\\
\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 &= a^2\left(a^2 - c^2\right)\\
b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2
\end{aligned}$$

que, dividiendo entre a^2b^2, se escribe finalmente como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2.12}$$

llamada la *ecuación canónica de la elípse.*

Hemos demostrado que si $\mathbf{x} = (x, y)$ satisface (2.8), entonces satisface (2.12). Lo inverso, aunque también es cierto, no es tan automático, requiere más argumentación pues en dos ocaciones (al pasar a las ecuaciones (2.10) y (2.11)) elevamos al cuadrado. Es cierto que si dos números son iguales entonces también sus cuadrados lo son (que fué lo que usamos); pero si $r^2 = t^2$ no necesariamente se tiene que $r = t$, pues podría ser que $r = -t$. Este es el problema conceptual conocido como "la raiz cuadrada tiene dos ramas", entonces los pasos de las ecuaciones (2.10) y (2.11) hacia arriba requieren argumentación sobre los signos (todos los demás pasos hacia arriba sí son automáticos). A manera de verificación, demostremos el inverso directamente.

Supongamos que $\mathbf{x} = (x, y)$ satisface la ecuación canónica de la elípse (2.12); veremos que entonces satisface la ecuación (2.9). Como en (2.12) se tiene una suma de números positivos que dan 1, entonces ambos sumandos están entre 0 y 1. Por lo tanto $|x| \leq |a| = a$, y esto habrá que usarse al sacar una raiz. De la ecuación (2.12) se puede despejar y^2 y sustituirla en las expresiones dentro de las raices de (2.9), para obtener, en la primera,

$$\begin{aligned}
(x-c)^2 + y^2 &= (x-c)^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \\
&= \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - 2cx + c^2 + b^2 \\
&= \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)x^2 - 2cx + \left(c^2 + b^2\right) \\
&= \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2 .
\end{aligned}$$

Ahora bien, como $|x| \leq |a| = a$ implica que $x \leq a$, y además $0 < c < a$, entonces $cx < a^2$ y por tanto $\frac{c}{a}x < a$. Así que la expresión que pusimos arriba es negativa y entonces la raiz es la otra posible rama; es decir, hemos demostrado que

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x\ .$$

De manera análoga, pero usando ahora que $-x \leq a$, se demuestra que

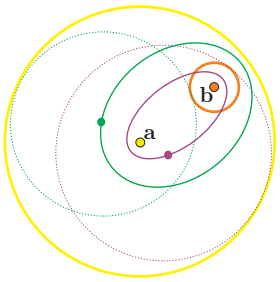
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x\ ,$$

de donde se sigue la ecuación de las distancias (2.9).

EJERCICIO 2.14 Dibuja algunas elípses usando el método del jardinero. ¿Verdad que no salen de un sólo trazo?

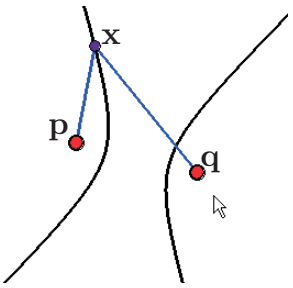
EJERCICIO 2.15 Sea $c > 0$, dibuja la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x - c| + |x + c|$. Concluye que si $a > c$ entonces $f(x) = 2a$ si y sólo si $|x| = a$.

EJERCICIO 2.16 Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos círculos con centros **a** y **b** respectivamente, tales que $\mathcal{C}_2$ está contenido en el interior de $\mathcal{C}_1$. Demuestra que el conjunto de puntos que son centro de un círculo $\mathcal{C}_3$ tangente tanto a $\mathcal{C}_1$ como a $\mathcal{C}_2$ es un par de elipses con focos **a** y **b**. Observa que en el caso límite en que $\mathcal{C}_1$ es tangente a $\mathcal{C}_2$, una de las elipses se degenera en un segmento.



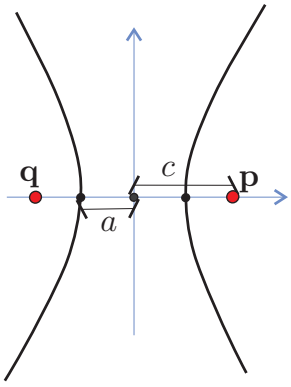
2.3 Hipérbolas

La *hipérbola* está definida como el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia (en valor absoluto) de sus distancias a dos puntos fijos **p** y **q**, llamados focos, es constante. Entonces, una hipérbola $\mathcal{H}$ está definida por la ecuación



$$|d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - d(\mathbf{x}, \mathbf{q})| = 2a\,, \tag{2.13}$$

donde $a > 0$, y ademas $2a < d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) =: 2c$ (ver Ejercicio 2.3). Si tomamos como focos a $\mathbf{p} = (c, 0)$ y a $\mathbf{q} = (-c, 0)$, esta ecuación toma la forma



$$\left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a \tag{2.14}$$

y veremos a continuación que es equivalente a

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2.15}$$

donde $b > 0$ está definida por $a^2 + b^2 = c^2$. A esta última ecuación se le llama la *ecuación canónica de la hipérbola.*

Como las dos primeras ecuaciones involucran valor absoluto, entonces tienen dos posibilidades que corresponden a las dos ramas de la hipérbola. En una de ellas la distancia a uno de los focos es mayor y en la otra se invierten los papeles. De la ecuación (2.14) se tienen dos posibilidades:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \end{aligned} \tag{2.16}$$

la primera corresponde a la rama donde $x < 0$ y la segunda a $x > 0$. Como se hizo en el caso de la elipse (elevando al cuadrado, simplificando para aislar la raiz que queda y luego volviendo a elevar al cuadrado y simplificando, ver Ejercicio 2.3) se obtiene, de cualquiera de las dos ecuaciones anteriores, la ecuación

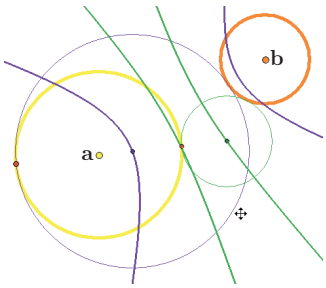
$$\left(a^2 - c^2\right) x^2 + a^2 y^2 = a^2 \left(a^2 - c^2\right). \tag{2.17}$$

Y de aquí, sustituyendo $-b^2 = a^2 - c^2$, y dividiendo entre $-a^2 b^2$ se obtiene la ecuación canónica.

EJERCICIO 2.17 Demuestra que la ecuación (2.13) define a la mediatriz de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ para $a = 0$; a los rayos complementarios del segmento $\overline{\mathbf{pq}}$ para $a = c$, y al conjunto vacio para $a > c$.

EJERCICIO 2.18 Demuestra que la ecuación (2.17) se sigue de cualquiera de las dos anteriores (2.16).

EJERCICIO 2.19 Demuestra que si (x, y) satisface la ecuación (2.15) entonces $|x| \geq a$. Concluye (sustituyendo en las raices, como en el caso de la elípse) que entonces, alguna de las dos ecuaciones (2.16) se satisfacen.



EJERCICIO 2.20 Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos círculos con centros $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ respectivamente, y sea $\mathcal{X}$ el conjunto de los puntos que son centro de un círculo $\mathcal{C}_3$ tangente tanto a $\mathcal{C}_1$ como a $\mathcal{C}_2$.

a) Demuestra que si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ estan fuera uno del otro y sus radios son distintos entonces $\mathcal{X}$ consta de un par de hipérbolas con focos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

b) Demuestra que si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ se intersectan pero no son tangentes y sus radios son distintos entonces $\mathcal{X}$ consta de un hipérbola y una elipse con focos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

c) Discute los casos limite entre los casos anteriores y el del Ejercicio 2.2 y el de radios iguales.

2.4 Parábolas

Una *parábola* es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto $\mathbf{p}$ (llamado su *foco*) y una recta ℓ, llamada su *directriz*, donde $\mathbf{p} \notin \ell$. Es decir, está definida por la ecuación

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = d(\mathbf{x}, \ell).$$

Tomemos un ejemplo sencillo con el foco en el eje y, la directriz paralela al eje x, y que además pase por el origen. Tenemos entonces $\mathbf{p} = (0, c)$, donde $c > 0$ digamos, y $\ell : y = -c$; de tal manera que la parábola queda determinada por la ecuación

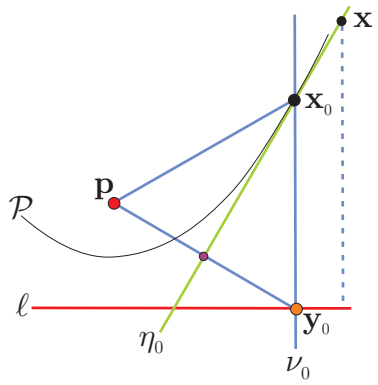
$$\sqrt{x^2 + (y - c)^2} = |y + c|.$$

Como ambos lados de la ecuación son positivos, esta es equivalente a la igualdad de sus cuadrados que da

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2cy + c^2 &= y^2 + 2cy + c^2 \\ x^2 &= 4cy. \end{aligned}$$

De tal manera que la gráfica de la función x^2 ($y = x^2$) es una parábola con foco $(0, 1/4)$ y directriz $y = -1/4$. Veremos ahora que cualquier parábola cumple "la propiedad de ser gráfica de una función" respecto a su directriz.

Sea $\mathcal{P}$ la parábola con foco $\mathbf{p}$ y directriz ℓ (donde $\mathbf{p} \notin \ell$). Dado un punto $\mathbf{y}_0 \in \ell$, es claro que los puntos del plano cuya distancia a ℓ coincide con (o se mide por) su distancia a $\mathbf{y}_0$ son precisamente los de la normal a ℓ que pasa por $\mathbf{y}_0$, llamémosla ν_0. Por otro lado, la mediatriz entre $\mathbf{y}_0$ y $\mathbf{p}$, llamémosla η_0, consta de los puntos cuyas distancias a $\mathbf{p}$ y a $\mathbf{y}_0$ coinciden. Por lo tanto la intersección de η_0 y ν_0 está en la parábola $\mathcal{P}$, es decir, $\mathbf{x}_0 = \nu_0 \cap \eta_0 \in \mathcal{P}$, pues $d(\mathbf{x}_0, \ell) = d(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = d(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})$. Pero además $\mathbf{x}_0$ es el único punto en la normal ν_0 que está en $\mathcal{P}$. Está es "la propiedad de la gráfica" a la que nos referiamos.

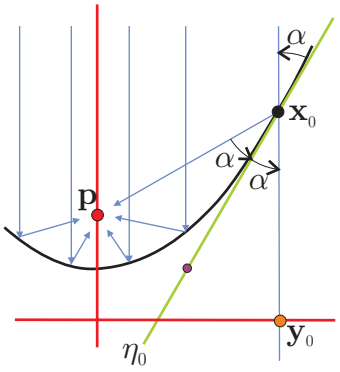


Podemos concluir aún más: que la mediatriz η_0 es la tangente a $\mathcal{P}$ en $\mathbf{x}_0$. Pues para cualquier otro punto $\mathbf{x} \in \eta_0$ se tiene que su distancia a ℓ es menor que su distancia a $\mathbf{y}_0$ que es su distancia a $\mathbf{p}$ ($d(\mathbf{x}, \ell) < d(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) = d(\mathbf{x}, \mathbf{p})$), entonces $\mathbf{x} \notin \mathcal{P}$. De hecho, la parábola $\mathcal{P}$ parte al plano en dos pedazos, los puntos más cerca de $\mathbf{p}$ que de ℓ (lo de adentro, digamos, definido por la desigualdad $d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq d(\mathbf{x}, \ell)$) y los que estan más cerca de ℓ que de $\mathbf{p}$ (lo de afuera, dado por $d(\mathbf{x}, \ell) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ en donde está η_0), que comparten la frontera donde estas distancias coinciden (la parábola $\mathcal{P}$). Así que η_0 pasa *tangente* a $\mathcal{P}$ en $\mathbf{x}_0$, pues $\mathbf{x}_0 \in \eta_0 \cap \mathcal{P}$ y además η_0 se queda de un lado de $\mathcal{P}$.

2.5 Propiedades focales

2.5.1 De la parábola

Del análisis geométrico anterior es fácil deducir la *propiedad focal* de la parábola que la ha hecho tan importante en la tecnología de los siglos recientes.



Como la mediatriz η_0 es bisectriz del ángulo $\mathbf{p}\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0$, que llamaremos 2α, entonces un fotón (particula de luz) que viaja por ν_0 (la normal a ℓ) hacia ℓ y "dentro" de la parábola, incide en ella con ángulo α (este ángulo se mide infinitesimalmente, es decir, con la tangente η_0); como el ángulo de incidencia es igual al de reflexión entonces sale por el rayo que va directo al foco $\mathbf{p}$.

Llamemos *eje* de la parábola a la perpendicular a la directriz que pasa por el foco. Se tiene entonces que un haz de fotones viajando en rayos paralelos al eje se va reflejando en la parábola para convertirse en un haz que converge en el foco $\mathbf{p}$.

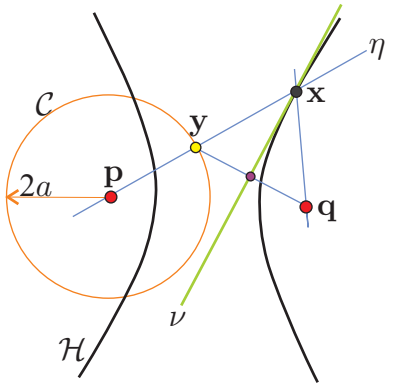
Una antena parabólica casera (que se obtiene girando en su eje a una parábola) apuntada a un satelite, refleja entonces la onda de radio que viene de este (el satelite está tan lejos que esta onda ya "es" paralela) y la hace converger en el receptor (puesto en el foco): "medio metro" cuadrado de la onda se concentra simultáneo en el receptor puntual; tal amplificación hace fácil captarla. El proceso inverso se usa en lamparas o en antenas transmisoras, reflejan un haz que emana del foco en un haz paralelo al eje.

2.5.2 De la hipérbola

¿Qué pasa si plateamos (hacemos espejo) el otro lado de la parábola? Es fácil ver que entonces el haz paralelo al eje que incide en ella (por fuera) se refleja en un haz que emana (o simula emanar) del foco. Si pensamos que un haz paralelo viene de un punto al infinito y queremos reproducir este fenómeno para un haz puntual (que emana de un punto) hay que usar a la hipérbola.

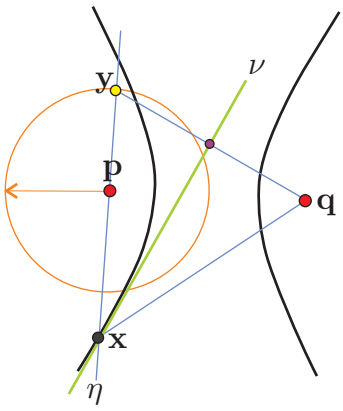
Sea $\mathcal{H}$ una hipérbola con focos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$; el haz que emana del foco $\mathbf{p}$, se refleja en la rama de $\mathcal{H}$ cercana a $\mathbf{q}$, en un haz que emana de $\mathbf{q}$. Entonces el uso tecnológico de la hipérbola es con refracción, si el fotón cruza la hipérbola con ángulo de incidencia igual al de refracción entonces el haz que emana de $\mathbf{p}$ se refracta en uno confluyente en $\mathbf{q}$ (algo así se usa en el diseño de las lentes). Demostrar esto equivale a demostrar que la tangente a la hipérbola $\mathcal{H}$ en un punto $\mathbf{x}$ es bisectriz de sus lineas a los focos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$. Para demostrarlo usaremos una construcción análoga a la de la parábola pero cambiando el uso de las normales a la directriz (que "vienen" del infinito) por el haz de rayos que sale de $\mathbf{p}$.

Supongamos que $\mathcal{H}$ está acabada de determinar por la constante $2a$, es decir, que



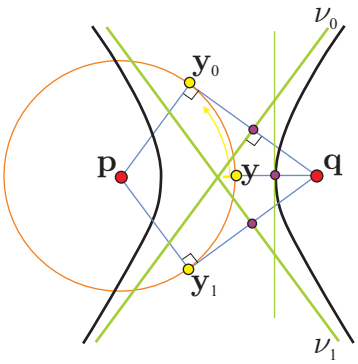
$$\mathcal{H}: \quad |d(\mathbf{x},\mathbf{p}) - d(\mathbf{x},\mathbf{q})| = 2a$$

donde $0 < 2a < d(\mathbf{q},\mathbf{p})$. Sea $\mathcal{C}$ el círculo con centro en $\mathbf{p}$ y radio $2a$, de tal manera que para cada $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$ tenemos un rayo que sale de $\mathbf{p}$. Para fijar ideas, tomemos una $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$ que apunta cerca de $\mathbf{q}$ (pero no justo a $\mathbf{q}$). Los puntos en el rayo $\vec{\eta}_{\mathbf{y}}$ que sale de $\mathbf{p}$ hacia $\mathbf{y}$ usan a este rayo para medir su distancia a $\mathbf{p}$. Si tomamos a $\nu_{\mathbf{y}}$ como la mediatriz de $\mathbf{y}$ y el otro foco $\mathbf{q}$ entonces (como en la parábola) se tiene que $\mathbf{x} := \vec{\eta}_{\mathbf{y}} \cap \nu_{\mathbf{y}} \in \mathcal{H}$ pues $d(\mathbf{x},\mathbf{q}) = d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ (porque $\mathbf{x} \in \nu_{\mathbf{y}}$) y $d(\mathbf{x},\mathbf{p}) = d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d(\mathbf{y},\mathbf{p}) = d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + 2a$ (donde estamos suponiendo que $\mathbf{x}$ está en el rayo que sale de $\mathbf{p}$ y pasa por $\mathbf{y}$ como en la figura), de tal manera que de las dos condiciones obtenemos que $d(\mathbf{x},\mathbf{p}) - d(\mathbf{x},\mathbf{q}) = 2a$.

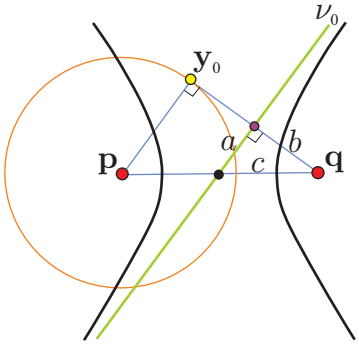


Pero antes de seguir adelante, consideremos el otro caso, es decir, cuando el punto de intersección $\mathbf{x}$ de las rectas $\eta_{\mathbf{y}}$ (por $\mathbf{p}$ y $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$) y $\nu_{\mathbf{y}}$, la mediatriz de $\mathbf{y}$ y $\mathbf{q}$, está del otro lado de $\mathbf{y}$ (es decir, cuando $\mathbf{p}$ está en el segmento $\overline{\mathbf{xy}}$). Se tiene entonces que $d(\mathbf{x},\mathbf{q}) = d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d(\mathbf{x},\mathbf{p}) + d(\mathbf{p},\mathbf{y}) = d(\mathbf{x},\mathbf{p}) + 2a$, de tal manera que $\mathbf{x}$ está en la otra rama de la hipérbola.

Hemos demostrado que si $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$ es tal que su recta por él y $\mathbf{p}$, $\eta_{\mathbf{y}}$, y su mediatriz con $\mathbf{q}$, $\nu_{\mathbf{y}}$, se intersectan en un punto $\mathbf{x}$, entonces $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$. Como en el caso de la parábola, la mediatriz $\nu_{\mathbf{y}}$ es ahora el candidato a ser la tangente a $\mathcal{H}$ en el punto $\mathbf{x}$. Esto se demuestra viendo que $\left|d(\mathbf{x}',\mathbf{p}) - d(\mathbf{x}',\mathbf{q})\right| < 2a$ para cualquier otro punto $\mathbf{x}' \in \nu_{\mathbf{y}}$ y se deja como ejercicio (hay que usar dos veces la desigualdad del triángulo). De aquí también se sigue la propiedad focal de la hipérbola.



Pero además, se sigue otro punto clave. La existencia de las asintotas. Hay un par de puntos en el círculo $\mathcal{C}$, para los cuales la mediatrz con $\mathbf{q}$, es paralela a su recta por $\mathbf{p}$. Para que esto suceda para un punto $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$, como la mediatriz con $\mathbf{q}$, $\nu_{\mathbf{y}}$, es ortogonal a la recta $\mathbf{qy}$, entonces es necesario (y suficiente) que el radio $\mathbf{py}$ sea también ortogonal a $\mathbf{qy}$; es decir, que $\mathbf{qy}$ sea la tangente al círculo $\mathcal{C}$ en el punto $\mathbf{y}$. Entonces las dos tangentes al círculo $\mathcal{C}$ que se pueden trazar desde $\mathbf{q}$, nos definen dos puntos, $\mathbf{y}_0$ y $\mathbf{y}_1$ digamos, cuyas mediatrices con $\mathbf{q}$, ν_0 y ν_1, son las *asintotas* de $\mathcal{H}$.



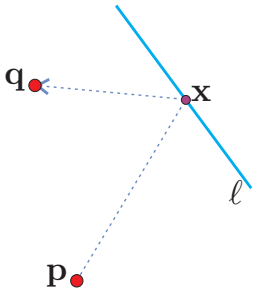
Para fijar ideas tomemos a los focos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ en una linea horizontal y con $\mathbf{p}$ a la izquierda, como en las figuras. Si movemos al punto $\mathbf{y}$ en el círculo $\mathcal{C}$, empezando con el más cercano a $\mathbf{q}$, hacia arriba; el correspondiente punto $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ viaja por la rama de $\mathbf{q}$ alejándose (arriba a la derecha), pero su tangente (que empieza vertical) la vemos como mediatriz de un segmentito que gira en $\mathbf{q}$ hacia arriba y se alarga un poco (siguiendo a su otro extremo $\mathbf{y}$); nótese que la tangente gira entonces hacia la derecha.

Cuando $\mathbf{y}$ llega a $\mathbf{y}_0$, el punto $\mathbf{x}$ (que viaja en $\mathcal{H}$) se ha "ido al infinito" pero su tangente llega placidamente a ν_0, la asintota correspondiente. Al mover otro poquito a $\mathbf{y}$, la tangente $\nu_{\mathbf{y}}$ empieza a girar hacia la izquierda (pues el segmento $\mathbf{qy}$ empieza a bajar) y el correspondiente punto $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ reaparece pero en la otra rama y justo por el lado opuesto. Podemos seguir girando a $\mathbf{y}$ sin problemas, mientras $\mathbf{x}$ recorre toda la rama de $\mathbf{p}$, hasta llegar al otro punto de tangencia $\mathbf{y}_1$ (ahora abajo) tenemos a $\mathbf{x}$ desaparecido (en el infinito) pero la tangente está en la otra asintota. Si seguimos girando, $\mathbf{x}$ vuelve a cambiar de rama y regresa, junto con $\mathbf{y}$, a su lugar de origen.

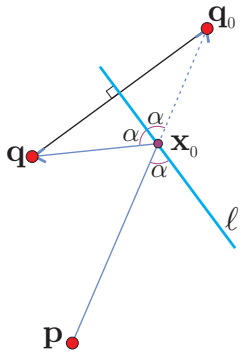
Además, obtenemos la interpretación geométrica de los tres parametros a, b, c en el triángulo rectángulo que se forma con el centro, el eje que une a los dos focos y una de las asintotas.

2.5.3 De la elipse

La propiedad focal de la elipse es que cualquier fotón que emana de un foco se refleja en la elipse para llegar al otro foco. De tal manera que si susurramos en uno de los focos de un cuarto elíptico, el sonido rebota en la pared y confluye estruendosamente en el otro foco (pues además, cada onda sonora que emana de un foco llega simultanea al otro foco, sin distorsión o "delay" pues en todas sus trayectorias ha recorrido la misma distancia). Una manera de ver esto es análoga a la que usamos para la hipérbola: tomar el círculo de radio $2a$ centrado en el foco $\mathbf{p}$ –este círculo contiene al otro foco $\mathbf{q}$, puesto que ahora $2a > d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$–, y luego ver que para los puntos de este círculo, su mediatriz con $\mathbf{q}$ es tangente a la elipse $\mathcal{E}$. Pero para variarle, se la dejamos al estudiante y usamos otro método basado en el clásico "problema del bombero".

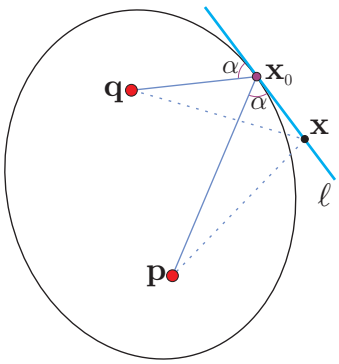


Supongamos que un bombero está parado en el punto $\mathbf{p}$ y hay un fuego –que tiene que apagar– en el punto $\mathbf{q}$. Pero tiene su cubeta vacia, entonces tiene que pasar primero a llenarla a un rio cuyo borde es la recta ℓ. El problema es ¿cuál es la trayectoria óptima que debe seguir el bombero? Es decir, para cuál punto $\mathbf{x} \in \ell$ se tiene que $d(\mathbf{p}, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ es mínima. En la vida real, y con muchos bomberos en fila, se aproximarían a la solución poco a poco. Pero desde nuestra comoda banca de la abstracción, hay una solución muy elegante.



No hemos especificado de que lado del rio está el fuego. Si estuviera del otro lado que el bombero, cualquier trayectoria al fuego tiene que pasar por ℓ y entonces debe irse por la línea recta de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ y tomar agua en $\mathbf{x}_0 = \ell \cap \overline{\mathbf{pq}}$. Entonces, si fuego y bombero están del mismo lado del rio ℓ, podemos pensar en un "fuego virtual", que es el reflejado de $\mathbf{q}$ en ℓ, llamémosle $\mathbf{q}_0$, que cumple que $d(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{q}_0)$ para todo $\mathbf{x} \in \ell$, (para $\mathbf{q}$ y $\mathbf{q}_0$, ℓ es su mediatriz). La solución es, por el caso anterior, $\mathbf{x}_0 = \ell \cap \overline{\mathbf{pq}_0}$. Pero obsérvese además que el ángulo α con el que llega el bombero a ℓ es igual al ángulo "de reflexión" con el que sale corriendo al fuego (ya con la cubeta llena), e igual al ángulo con el que seguiría su trayecto al fuego virtual, y que está propiedad determina al punto de mínimo recorrido $\mathbf{x}_0$; es fácil convencerse de que para cualquier otro punto de ℓ los ángulos de llegada y de salida son distintos. Si los bomberos fueran fotones emanando de $\mathbf{p}$ y ℓ un espejo, el único que llega a $\mathbf{q}$ es el foton que toma el recorrido mínimo.

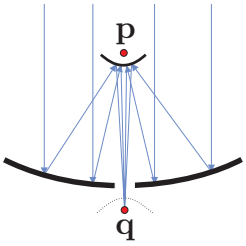
Pensemos ahora que $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ son los focos de una elípse y $\mathbf{x}_0$ un punto en ella. Sea ℓ la recta que pasa por $\mathbf{x}_0$ y bisecta (por fuera) a los segmentos de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ a $\mathbf{x}_0$. Por construcción y la solución al problema del bombero, cualquier otro punto $\mathbf{x} \in \ell$ tiene mayor suma de distancias a los focos y por tanto está fuera de la elipse. Esto demuestra que ℓ es la tangente a la elípse en el punto $\mathbf{x}_0$ y por tanto, su propiedad focal con la que empezamos este parrafo.



2.5.4 Telescopios

Por último, veamos brevemente cómo funciona un telescopio moderno. El haz de fotones que viene de una galaxia, digamos, es "paralelo" pues está tan lejos que desde la Tierra es imposible medir variación de ángulos (mucho más que los satelites respecto a la superficie de las antenitas parbólicas). Un gran espejo parabólico hace confluir este haz en su foco $\mathbf{p}$. Pero $\mathbf{p}$ está del otro lado del espejo. Esto se resuelve poniendo un pequeño espejo secundario elíptico y con el mismo foco $\mathbf{p}$, que vuelve a reflejar el haz. Este pasa por un pequeño agujero en el centro del primario y vuelve a confluir en su otro foco $\mathbf{q}$, que ahora sí está detras del gran espejo primario, y ahí se captura en el detector. El hoyito que se hace al primario, así como lo que tapa el secundario o la estructura, cuenta poco pues la superficie crece como el radio al cuadrado.

Otra manera de resolver el problema de "regresar el haz" hacia atras del espejo primario, que es la más usada, es poniendo un secundario hiperbólico en vez de elíptico, con la superficie reflejante por fuera y otra vez con el mismo foco $\mathbf{p}$. De nuevo hace reflejar el haz en uno que confluye en su otro foco $\mathbf{q}$, comodamente situado detras del hoyito del primario.



Lo que cuenta es qué tantos fotones podemos capturar en el sistema óptico; a simple vista es la superficie de la pupila, los telescopios modernos recolectan los fotones que chocarían en decenas de metros cuadrados en una dirección dada y los hacen pasar, despues de dos reflexiones adecuadas, por la pupila de algún instrumento detector.

2.6 *Armonía y excentricidad

Hemos definido elípses e hipérbolas como lugares geométricos en base a propiedades aditivas de distancias. Ahora estudiaremos a las cónicas respecto a propiedades multiplicativas. Pues resulta que las tres cónicas (elipses, parábolas e hipérbolas) se definen también como el lugar geométrico de los puntos $\mathbf{x}$ cuya razón de sus distancias a un foco $\mathbf{p}$ y a una recta ℓ llamada *diréctriz* es una constante fija e, llamada su

excentricidad. Es decir, estan dadas por la ecuación

$$d(\mathbf{x},\mathbf{p}) = e\, d(\mathbf{x},\ell)\,.$$

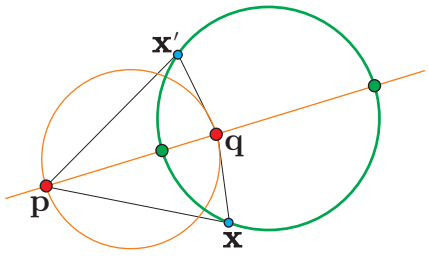
Para $e = 1$, esta es la ecuación de la parábola que ya estudiamos. Veremos que para $e < 1$ define una elipse y para $e > 1$ una hipérbola, de tal manera que las tres cónicas quedan en una sola familia. Pero notemos que no apareció el círculo. Este tiene excentricidad 0 que no cabe en la definición anterior (más que como limite). Sin embargo, aparece en una instancia (en apariencia) más simple de esta ecuación que es tomando otro punto en vez de la línea y veremos que ligado a esto surge naturalmente el concepto clásico de puntos armónicos.

2.6.1 Puntos armónicos y círculos de Apolonio

Sean $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ dos puntos distintos en el plano. Consideremos la ecuación

$$d(\mathbf{x},\mathbf{p}) = h\, d(\mathbf{x},\mathbf{q})\,, \tag{2.18}$$

donde $h > 0$. Para $h = 1$ esta es la ecuación de la mediatriz que estudiamos en el capítulo anterior, pero a excepción de $h = 1$ donde da una recta, veremos que está ecuación define círculos; los llamados *"círculos de Apolonio"*.

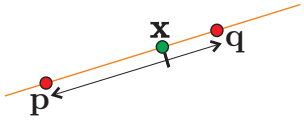


Notemos primero que el lugar geométrico $\mathcal{C}$ definido por (2.18) es simétrico respecto a la línea ℓ que pasa por $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$, pues si un punto $\mathbf{x}$ satisface la ecuación tambien lo hace su reflejado $\mathbf{x}'$ respecto a la recta ℓ. De tal manera que la recta ℓ debe ser un diametro y el círculo debe estar determinado por los puntos de intersección $\ell \cap \mathcal{C}$. Encontrémoslos.

Sabemos que los puntos de ℓ se expresan en coordenadas baricéntricas como $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q}$ con $\alpha + \beta = 1$, dónde, si damos una dirección a ℓ, de $\mathbf{p}$ hacia $\mathbf{q}$ digamos, y denotamos a las distancias dirigidas con $\vec{d}$ se tiene que

$$\alpha = \frac{\vec{d}(\mathbf{x},\mathbf{q})}{\vec{d}(\mathbf{p},\mathbf{q})} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\vec{d}(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\vec{d}(\mathbf{q},\mathbf{p})} = \frac{\vec{d}(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\vec{d}(\mathbf{p},\mathbf{q})}.$$

De tal manera que si $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q} \in \ell$, entonces



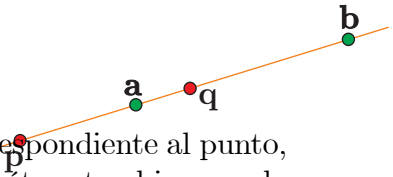
$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\vec{d}(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\vec{d}(\mathbf{x},\mathbf{q})}.$$

Por tanto, para encontrar las soluciones de (2.18) en ℓ basta encontrar a las soluciones de $|\beta/\alpha| = h$ con $\alpha + \beta = 1$: sustituyendo $\beta = h\alpha$ en esta última ecuación, encontramos una solución dentro del segmento $\overline{\mathbf{pq}}$ (con α y β positivas) dada por

$$\alpha_h := \frac{1}{h+1} \quad \text{y} \quad \beta_h := \frac{h}{h+1}.$$

Llamemos $\mathbf{a}$ al punto correspondiente, es decir, sea $\mathbf{a} = \alpha_h \mathbf{p} + \beta_h \mathbf{q}$. Obsérvese que $\mathbf{a}$ es el punto medio cuando $h = 1$; que $\mathbf{a}$ está más cerca de $\mathbf{p}$ para $h < 1$ y que se aproxima a $\mathbf{q}$ conforme h crece. Para $h \neq 1$, también tenemos otra solución fuera del segmento (que viene de tomar $\beta = -h\alpha$), a saber

$$\alpha'_h = \frac{1}{1-h} = \frac{\alpha_h}{\alpha_h - \beta_h} \quad \text{y} \quad \beta'_h = \frac{h}{h-1} = \frac{\beta_h}{\beta_h - \alpha_h}.$$



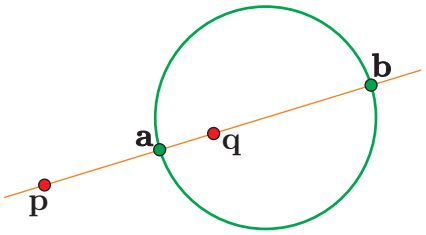
Llamémos $\mathbf{b}$ a esta otra solución de (2.18) en ℓ (es decir, $\mathbf{b} = \alpha'_h \mathbf{p} + \beta'_h \mathbf{q}$), y nótese que $\mathbf{b}$ está en el rayo exterior de ℓ correspondiente al punto, $\mathbf{p}$ o $\mathbf{q}$, más cercano a $\mathbf{a}$ ($h < 1$ o $h > 1$, respectivamente). (Y nótese tambien que la expresión de α_h y β_h en términos de α'_h y β'_h es exactamente la misma).

Clásicamente, se dice que la pareja $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ es *armónica* respecto a la pareja $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ (o que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son *conjugados armónicos* respecto a $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$) pues (como reza la definición general) los cuatro puntos están alineados y cumplen la relación

$$\frac{d(\mathbf{p}, \mathbf{a})}{d(\mathbf{a}, \mathbf{q})} = \frac{d(\mathbf{p}, \mathbf{b})}{d(\mathbf{b}, \mathbf{q})}, \tag{2.19}$$

que, en nuestro caso, es la *"razón de armonía"* h. Se tiene claramente que la relación de armonía es simétrica (pues $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ son armónicos respecto a $\mathbf{a}, \mathbf{b}$). Y para aclarar otro poco su relación geométrica, hay que observar que si en la recta real tomamos a $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ como los puntos -1 y 1 entonces el conjugado armónico de x es x^{-1}, y el 0 queda como conjugado armónico del infinito (así como el punto medio de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$, $h = 1$, fué un caso especial).

Ahora sí, demostremos que el círculo con diametro el segmento $\overline{\mathbf{ab}}$ está dado por la ecuación (2.18), que es, recuérdese, $d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = h\, d(\mathbf{x}, \mathbf{q})$. En el Ejercicio 2.1 se debió demostrar que el círculo con diametro $\overline{\mathbf{ab}}$ está dado por la ecuación $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0$ (si no se hizo, compruébese ahora). Desarrollemos entonces esta expresión, utilizando que los coeficientes son coordenadas baricéntricas (i.e., que suman 1)



$$\begin{aligned}
(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}) &= (\mathbf{x} - \alpha_h \mathbf{p} - \beta_h \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{x} - \alpha'_h \mathbf{p} - \beta'_h \mathbf{q}) \\
&= (\alpha_h (\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \beta_h (\mathbf{x} - \mathbf{q})) \cdot (\alpha'_h (\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \beta'_h (\mathbf{x} - \mathbf{q})) \\
&= \alpha_h \alpha'_h (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \beta_h \beta'_h (\mathbf{x} - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{q}) \\
&\quad + (\alpha_h \beta'_h + \beta_h \alpha'_h) (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{q}) \qquad (2.20) \\
&= \left(\frac{1}{1-h^2}\right) \left((\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) - h^2 (\mathbf{x} - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{q}) \right)
\end{aligned}$$

donde hemos usado las definiciones –en términos de $h \neq 1$– de nuestros coeficientes (ver Ejercicio 2.6.1). Se tiene entonces que $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0$ si y sólo si $(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = h^2 (\mathbf{x} - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{q})$ que es justo el cuadrado de la ecuación (2.18).

Además, tenemos al menos otras tres maneras interesantes de detectar armonía.

Teorema 2.6.1 *Sean* $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ *cuatro puntos colineales, y sean* $\mathcal{C}_1$ *y* $\mathcal{C}_2$ *los círculos con diametro* $\overline{\mathbf{pq}}$ *y* $\overline{\mathbf{ab}}$ *respectivamente. Entonces son equivalentes:*

i) Las parejas $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ *y* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *son armónicas.*

ii) Se cumple que $(\mathbf{a}-\mathbf{p})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{q}) = -(\mathbf{a}-\mathbf{q})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{p})$

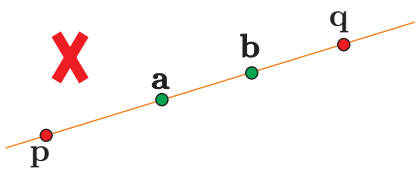
iii) El punto $\mathbf{b}$ *está en la línea polar de* $\mathbf{a}$ *respecto a* $\mathcal{C}_1$*.*

iv) Los círculos $\mathcal{C}_1$ *y* $\mathcal{C}_2$ *se intersectan ortogonalmente.*

Demostración. **(i)⇔(ii)**. La condición de armonía (2.19) claramente se puede reescribir, usando normas para expresar distancias, como

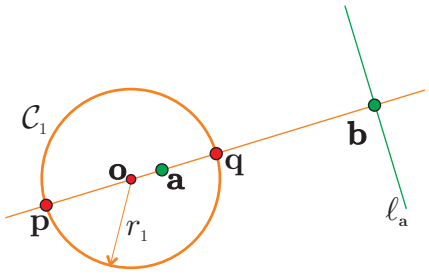
$$|\mathbf{a}-\mathbf{p}|\,|\mathbf{b}-\mathbf{q}| = |\mathbf{a}-\mathbf{q}|\,|\mathbf{b}-\mathbf{p}| \qquad ((\text{i}))$$

La equivalencia de (i) y (ii) se sigue del hecho de que si dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos entonces $|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| = \pm(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$ dependiendo de si apuntan en la misma dirección $(+)$ o en direcciones opuestas $(-)$. Esto da inmediatamente la implicación (ii)⇒(i) pues por la hipótesis general del Teorema los cuatro puntos estan alineados y entonces sus diferencias son paralelas. Para el regreso sólo hay que tener cuidado con los signos. Si se cumple (i) es fácil ver que el orden lineal en que aparecen los puntos en la línea es alternado (entre las parejas), pues si, por ejemplo, $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ fueran los extremos, un lado de (i) es estrictamente menor que el otro. Entonces –renombrándo entre las parejas si es necesario– podemos suponer que aparecen en el orden $\mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{q}, \mathbf{b}$. En este caso (i) toma la expresión (ii).



(i)⇒(iii) Supongamos que $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ y $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ son los de los parrafos anteriores con razón de armonía $h \neq 1$. Sean $\mathbf{o}$ (ojo, no necesariamente es el orígen $\mathbf{0}$) el centro y $r_1$el radio del círculo $\mathcal{C}_1$, es decir, $\mathbf{o} = (1/2)(\mathbf{p}+\mathbf{q})$ y $r_1 = |\mathbf{p}-\mathbf{q}|/2$. De tal manera que $\mathcal{C}_1 :\ (\mathbf{x}-\mathbf{o})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{o}) = r_1^2$.

Por la Sección 1.1, ver que $\mathbf{b}$ está en la linea polar de $\mathbf{a}$ respecto a $\mathcal{C}_1$ equivale a demostrar que $(\mathbf{a}-\mathbf{o})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{o}) = r_1^2$. Pero ya evaluamos $(\mathbf{x}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{b}) = (\mathbf{a}-\mathbf{x})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{x})$ para cualquier $\mathbf{x}$; entonces hay que sustituir $\mathbf{o}$ en (2.20), para obtener



$$\begin{aligned}(\mathbf{a}-\mathbf{o})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{o}) &= \left(\frac{1}{1-h^2}\right)((\mathbf{o}-\mathbf{p})\cdot(\mathbf{o}-\mathbf{p}) \\ &\quad -h^2(\mathbf{o}-\mathbf{q})\cdot(\mathbf{o}-\mathbf{q})) \\ &= \left(\frac{1}{1-h^2}\right)\left(r_1^2 - h^2 r_1^2\right) = r_1^2\,.\end{aligned}$$

Por el papel que jugó (y jugará) el punto $\mathbf{o}$, conviene pensar que sí es el orígen. Si no lo fuera, lo trasladamos al origen junto con el resto de los puntos y las propiedades que nos interesan se preservan. Puede pensarse también que en lo que sigue cada letra ($\mathbf{b}$ digamos) representa al punto original menos $\mathbf{o}$ (a $\mathbf{b}-\mathbf{o}$ en el ejemplo). Tenemos

entonces que $\mathbf{p} = -\mathbf{q}$ (pues el origen es ahora su punto medio) y que $r_1^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$. Ahora la condición (iii) equivale a

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = r_1^2 \tag{iii'}$$

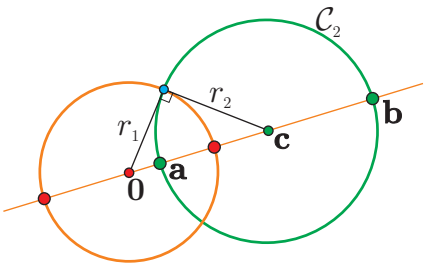
y podemos demostrar la equivalencia de (ii) y (iii) de un solo golpe (aunque un lado ya esté demostrado).

(ii)⇔(iii') Usando que $\mathbf{q} = -\mathbf{p}$, claramente se tiene

$$(\mathbf{a} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{q}) + (\mathbf{a} - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{p}) = 2\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p})$$

que concluye la demostración ((ii) es que el lado izquierdo sea cero y (iii) que el lado derecho lo es).

(iii)⇔(iv) Sean $\mathbf{c} = (1/2)\,(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ el centro de $\mathcal{C}_2$, y $r_2 = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|\,/2$ su radio. Que $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ sean *ortogonales* quiere decir que sus tangentes en el punto de intersección lo son; y esto equivale a que sus radios al punto de intersección son ortogonales (pues las tangentes son ortogonales a los radios). Por el Teorema de Pitágoras esto equivale a que



$$r_1^2 + r_2^2 = |\mathbf{c}|^2 \tag{iv'}$$

(pues $\mathcal{C}_1$ está centrado en el origen asi que $|\mathbf{c}|$ es la distancia entre los centros), que es lo que tomamos en adelante como (iv). Sabemos, por hipótesis, que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelos y hay que observar que ambas condiciones ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = r_1^2 > 0$ y $r_1^2 + r_2^2 = |\mathbf{c}|^2$) implican que estan del mismo lado del origen. Podemos suponer entonces que $\mathbf{a}$ es "más chico" que $\mathbf{b}$, y entonces

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}|^2 &= (|\mathbf{a}| + r_2)^2 \\ &= |\mathbf{a}|\,(|\mathbf{a}| + 2r_2) + r_2^2 \\ &= |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| + r_2^2 \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + r_2^2 \end{aligned}$$

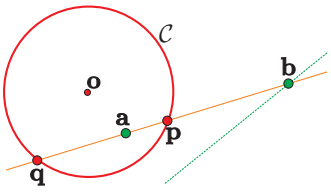
Lo cual demuestra la equivalencia (iii')⇔(iv') y concluye el Teorema. □

En resumén, los círculos de Apolonio de un par de puntos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$, son los ortogonales al círculo que los tiene como diametro y cuyo centro está en esa línea, y además la cortan en sus conjugados armónicos; teniendo como límites a los "círculos de radio cero" en $\mathbf{p}$ y en $\mathbf{q}$ y a su línea mediatriz.

EJERCICIO 2.21 Demuestra que $\alpha_h\beta'_h = -\beta_h\alpha'_h$ (usando la definición de los correspondientes primados sin referencia a h); y, usando las definiciones en base a h, demuestra que

$$\alpha_h\alpha'_h = \frac{1}{1-h^2} \quad \text{y} \quad \beta_h\beta'_h = \frac{h^2}{h^2-1}$$

son las coordenadas baricéntricas del centro del círculo (2.18) respecto a $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$.



EJERCICIO 2.22 Sean $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ dos puntos en un círculo $\mathcal{C}$ con centro $\mathbf{o}$; y sea $\mathbf{a}$ un punto en el segmento $\overline{\mathbf{pq}}$ distinto del punto medio, es decir, $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q}$ con $\alpha + \beta = 1$, $0 < \alpha < 1$ y $\alpha \neq \beta$. Demuestra que el punto armónico de $\mathbf{a}$ respecto a $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ (llamémoslo $\mathbf{b}$) está en la línea polar de $\mathbf{a}$ respecto al círculo $\mathcal{C}$. (Expresa $\mathbf{b}$ en coordenadas baricéntricas respecto a $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$, y sustituye en la ecuación de la polar de $\mathbf{a}$). Concluye que la linea polar de un punto $\mathbf{a}$ en el interior de un círculo consiste de todos sus armónicos respecto a la intersección con el círculo de las líneas que pasan por el.

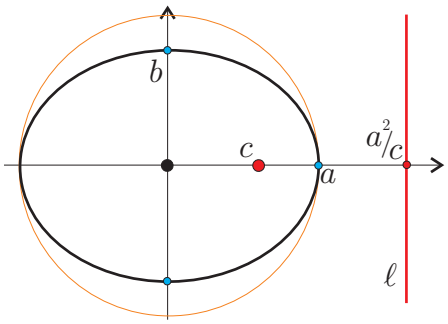
2.6.2 Excentricidad

Demostraremos ahora que elipses e hipérbolas se definen por la ecuación

$$d(\mathbf{x},\mathbf{p}) = e\, d(\mathbf{x},\ell)\,, \tag{2.21}$$

con $e < 1$ y $e > 1$ respectivamente, donde $\mathbf{p}$ es uno de sus focos, y a ℓ la llamaremos su *directriz* correspondiente. La constante e es llamada la *excentricidad* de la cónica, y ya sabemos que las de excentricidad 1 son las parábolas.

Consideremos la elipse canónica $\mathcal{E}$ con centro en el origen y semiejes $a > b$ en los ejes coordenados. Sabemos que sus focos están en $\mathbf{p} = (c, 0)$ y $\mathbf{q} = (-c, 0)$, donde $c > 0$ es tal que $b^2 + c^2 = a^2$. Sabemos además que $\mathcal{E}$ intersecta al eje-x, que es su eje focal, en los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$.



Resulta que la directriz de $\mathcal{E}$ correspodiente al foco $\mathbf{p}$ es ortogonal al eje-x y lo intersecta en el conjugado armónico de $\mathbf{p}$ respecto a los puntos de intersección; es decir, es la línea polar a $\mathbf{p}$ respecto al círculo $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = a^2$ (que, notemos, es doblemente tangente a $\mathcal{E}$). Sea entonces ℓ definida por la ecuación

$$x = \frac{a^2}{c}.$$

De los datos que tenemos podemos deducir su excentricidad (pues del punto $(a, 0) \in \mathcal{E}$ conocemos sus distancias a $\mathbf{p}$ y ℓ), que resulta $e = c/a < 1$. Desarrollemos entonces a la ecuación (2.21) en coordenadas para ver si son ciertas las afirmaciones que nos hemos sacado de la manga de la historia.

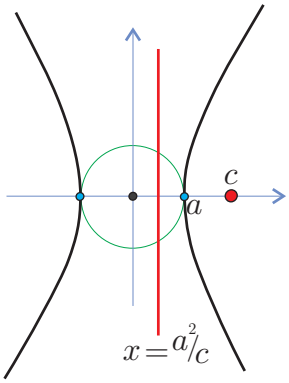
Puesto que ambos lados de (2.21) son positivos, esta ecuación es equivalente a su cuadrado que en coordenadas (y nuestra definición de $\mathbf{p}, \ell$ y e) toma la forma

$$\begin{aligned}(x-c)^2+y^2 &= \left(\frac{c}{a}\right)^2\left(x-\frac{a^2}{c}\right)^2\\ x^2-2cx+c^2+y^2 &= \left(\frac{c^2}{a^2}\right)\left(x^2-2\frac{a^2}{c}x+\frac{a^4}{c^2}\right)\\ \left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)x^2+y^2 &= a^2-c^2\end{aligned}$$

De aquí, dividiendo entre $b^2=a^2-c^2$ se obtiene la ecuación canónica de la elípse $\mathcal{E}$ y quedan demostradas todas nuestras aseveraciones.

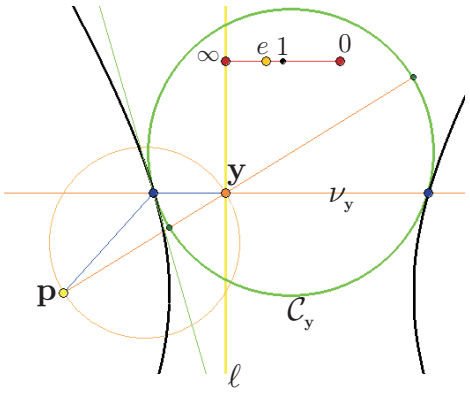
Para una hipérbola $\mathcal{H}$, de nuevo la directriz correspondiente a un foco es perpendicular al eje focal y lo intersecta en su conjugado armónico respecto a los puntos de intersección con $\mathcal{H}$. De tal manera que podemos tomar exactamente los mismos datos del caso anterior ($\mathbf{p}=(c,0)$, $\ell:\ cx=a^2$ y $e=c/a$), y la ecuación (2.21) se desarrolla igualito. Pero ahora tenemos que $c>a$ (la excentricidad es mayor que 1, $e=c/a>1$) y entonces definimos $b>0$ tal que $a^2+b^2=c^2$; de tal manera que en el último paso hay que dividir por $-b^2$ para obtener

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ .$$



La excentricidad de una cónica es un invariante de semejanza, es decir, si magnificamos (hacemos zoom) o disminuimos una cónica, su excentricidad se mantiene. Pues esta magnificación (o contracción) se logra alejando (o acercando) al foco $\mathbf{p}$ y a la directriz ℓ. Pero si fijamos a estos últimos y variamos la excentricidad e, se cubre por cónicas todo el plano (exceptuando a $\mathbf{p}$ y ℓ que aparecen como los limites $e\to 0$ y $e\to\infty$ respectivamente) pues cualquier punto da una razón específica entre las distancias y por tanto una excentricidad que lo incluye.

Recreémos la construcción de la parábola en base a mediatrices, pero ahora con círculos de Apolonio. Si $\mathcal{P}$ es la cónica con foco $\mathbf{p}$, directriz ℓ y excentricidad e (puede ser elipse, parábola o hipérbola), y para cada punto $\mathbf{y}$ en ℓ tomamos el círculo de Apolonio $\mathcal{C}_\mathbf{y}$ entre $\mathbf{p}$ y $\mathbf{y}$ con razón de armonía e, entonces es claro que $\mathcal{C}_\mathbf{y}\cap\nu_\mathbf{y}\subset\mathcal{P}$ (donde $\nu_\mathbf{y}$ es la normal a ℓ en $\mathbf{y}$). Pues la distancia de un punto en $\nu_\mathbf{y}$ a ℓ corresponde a su distancia a $\mathbf{y}$; y si está en $\mathcal{C}_\mathbf{y}$ la razón de las distancias a $\mathbf{p}$ y $\mathbf{y}$ es la adecuada. Pero ahora $\mathcal{C}_\mathbf{y}\cap\nu_\mathbf{y}$ no es necesariamente un punto pues, salvo el caso $e=1$ donde $\mathcal{C}_\mathbf{y}$ es la mediatriz, un círculo intersecta a una recta en 2, 1 o 0 puntos.

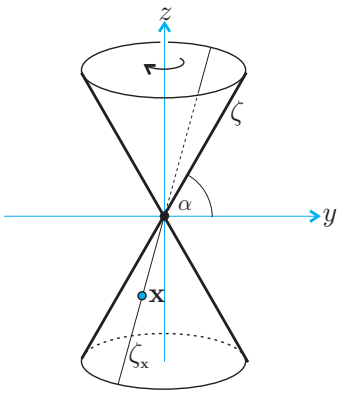


Para el caso $e < 1$, los círculos de Apolonio $\mathcal{C}_{\mathbf{y}}$ contienen a $\mathbf{p}$ en su interior; crecen conforme $\mathbf{y}$ se aleja en ℓ, pero llega un momento (que corresponde al semieje menor de la elipse) en el que $\nu_{\mathbf{y}}$ ya no los corta. Por el contrario, para $e > 1$ los círculos de Apolonio contienen a $\mathbf{y}$, y entonces $\nu_{\mathbf{y}}$siempre los corta en dos puntos que dibujan las dos ramas de la hipérbola.

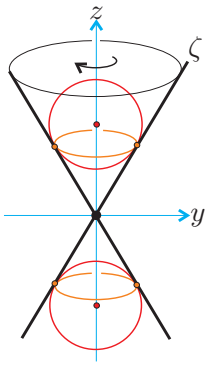
En ambos casos, si $\mathcal{C}_{\mathbf{y}}$ corta a $\nu_{\mathbf{y}}$ en $\mathbf{x}$, digamos, entonces por un argumento análogo al de la parábola se puede ver que está fuera de $\mathcal{P}$, es decir, que $\mathcal{C}_{\mathbf{y}}$ es *tangente* a $\mathcal{P}$ en $\mathbf{x}$, pero en este caso, y salvo por el último toque a una elipse en el semieje menor, también es tangente a $\mathcal{P}$ en otro punto. Para la hipérbola es fácil verlos, simplemente dejar caer un círculo hacía el centro y si es más grande que la cinturita: ahí donde se detiene es un $\mathcal{C}_{\mathbf{y}}$, donde $\mathbf{y}$ corresponde a la altura de los dos puntos en $\mathcal{P}$ donde se atoró.

2.7 *Esferas de Dandelin

Hemos desarrollado todo este capítulo en base a las definiciones planas de las cónicas por propiedades de distancias. Sin embargo, en su introducción empezamos como los griegos: definiéndolas en el espacio como intersección de un cono con planos. Veremos brevemente que tal definición corresponde a la que usamos, basándonos en una demostración que data de cerca del 1800 debida a un tal Dandelin.

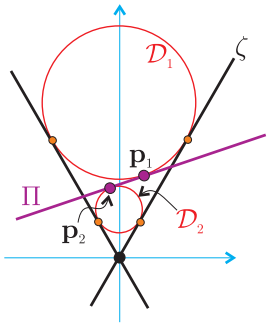


Para definir un cono $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}^3$, consideremos una linea ζ por el orígen en el plano yz con un ángulo α respecto al eje y: y hagámosla girar alrededor del eje z. De tal manera que la intersección de $\mathcal{C}$ con un plano horizontal ($z = c$, digamos) es un círculo centrado en "el origen" $((0, 0, c)$, y de radio $c \cos\alpha / \sin\alpha)$. Por la definición, es claro que para cualquier punto $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, su recta por el origen, que denotaremos $\zeta_{\mathbf{x}}$, está contenida en el cono, y la llamaremos *la recta del cono por* $\mathbf{x}$. Queremos hacer ver que cualquier plano Π que no contenga al origen intersecta al cono $\mathcal{C}$ en una cónica (definida por distancias).



Las *esferas tangentes* al cono, son esferas con centro en el eje z y que tocan al cono pero que no lo cortan, es decir, que tienen a todas las lineas del cono como lineas tangentes. Si dejamos caer una esfera dentro del cono se asienta en una esfera tangente. Es claro que las esferas tangentes se obtienen de hacer girar en el eje z un círculo centrado en él y tangente a la línea generadora ζ; que para cada radio hay exactamente dos esferas tangentes (una arriba y una abajo), y que para cada punto del eje-z hay una única esfera tangente centrada en él. Además, cada esfera tangente al cono lo intersecta en un círculo horizontal llamado su *círculo de tangencia* o de *contacto*.

Tomemos ahora un plano Π casi horizontal. Este plano Π tiene exactamente dos esferas tangentes que tambien son tangentes al cono $\mathcal{C}$, que llamaremos sus *esferas de Dandelin,* $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$. Veámos, y para fijar ideas, pensemos que el plano Π intersecta al cono arriba del origen, pero no muy lejos. Si pensamos en una esfera muy grande tangente al cono, ésta esta muy arriba; al desinflarla (manteniéndola siempre tangente al cono) va bajando. Hay un primer momento en el que toca a Π, esa es $\mathcal{D}_1$. Al seguir desinflándola, intersecta a Π en círculos, y hay un último momento en que lo toca –esa es $\mathcal{D}_2$– para seguir decreciéndo, insignificante, hacia el origen.

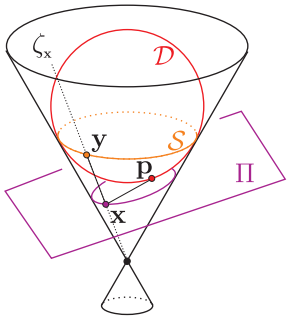


Más formalmente, y sin perder generalidad, podemos suponer que el plano Π contiene a la dirección del eje x; entonces las esferas de Dandelin de Π corresponden a dos de los cuatro círculos tangentes a las tres rectas que se obtienen de intersectar al plano yz con el plano Π y el cono $\mathcal{C}$ (precisamente, los dos que caen dentro del cono).

Sean $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ los puntos donde $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ tocan, respectivamente, al plano Π. Estos serán los focos de la elipse $\Pi \cap \mathcal{C}$. Para verlo necesitamos un lema que es más dificil enunciar que probar.

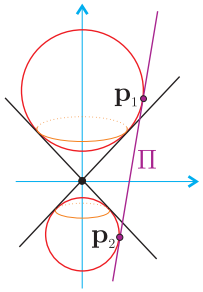
Lema 2.7.1 *Sea $\mathcal{D}$ una esfera de Dandelin de un plano Π. Sea $\mathbf{p}$ su punto de contacto con Π; y sea $\mathcal{S}$ el círculo de tangencia de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{C}$. Para cualquier $\mathbf{x} \in \Pi \cap \mathcal{C}$, sea $\mathbf{y}$ la intersección de la recta del cono por $\mathbf{x}$ y el círculo de tangencia, i.e. $\mathbf{y} = \mathcal{S} \cap \zeta_{\mathbf{x}}$; se tiene entonces que*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$



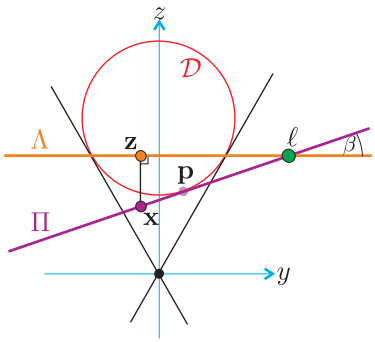
Basta observar que los segmentos $\overline{\mathbf{xp}}$ y $\overline{\mathbf{xy}}$ son ambos tangentes a la esfera $\mathcal{D}$ y que, en general, dos segmentos que salen del mismo punto y llegan tangentes a una esfera miden lo mismo. □

Ahora sí, podemos demostrar que $\Pi \cap \mathcal{C}$ es una elipse tal como las definimos. Sean $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ los círculos de tangencia de las esferas de Dandelin $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$, respectivamente. Dado $\mathbf{x} \in \Pi \cap \mathcal{C}$, según el Lema, sus distancias a los respectivos focos se pueden medir en la linea del cono como las distancias de $\mathbf{x}$ a los círculos de tangencia $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$. Como $\mathbf{x}$ está entre estos dos círculos, la suma de las distancias es constante (a saber, es la distancia, medida en lineas del cono, entre $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$).



Cuando el plano Π es cercano a un plano vertical (incluyendo a este caso), se tiene que Π intersecta a ambos lados del cono $\mathcal{C}$. Pero también tiene dos esferas de Dandelin tangentes a él y al cono. De nuevo, sus puntos de tangencia con el plano son los focos de la hipérbola $\Pi \cap \mathcal{C}$, y la demostración es análoga (usando al Lema). Dejamos los detalles al lector (siguiente ejercicio), pues para el caso de la parábola necesitamos encontrar la directriz, y su análisis incluira los tres casos.

Supongamos que el plano Π tiene un ángulo $\beta > 0$ respecto al plano horizontal xy, y que $\mathcal{D}$ es su esfera de Dandelin, es decir, que es tangente a Π y al cono $\mathcal{C}$ con punto y círculo de contacto $\mathbf{p}$ y $\mathcal{S}$ respectivamente. Sea Λ el plano horizontal que contiene al círculo de tangencia $\mathcal{S}$. Sea $\ell = \Pi \cap \Lambda$, línea que podemos pensar como paralela al eje x y que llamaremos la *directriz*.



Consideremos un punto $\mathbf{x} \in \Pi \cap \mathcal{C}$. De la proyección al plano yz, es fácil deducir que

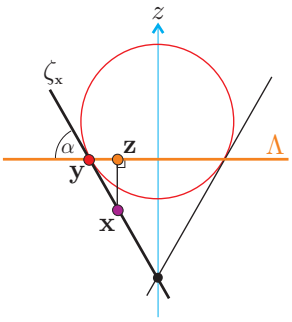
$$d(\mathbf{x}, \ell) \operatorname{sen} \beta = d(\mathbf{x}, \mathbf{z}),$$

donde $\mathbf{z}$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{x}$ al plano horizontal Λ. Tomemos ahora el plano vertical que pasa por $\mathbf{x}$ y el eje z. Claramente contiene a $\mathbf{z}$ y a la linea del cono $\zeta_{\mathbf{x}}$ que pasa por $\mathbf{x}$; y es fácil ver en él que

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \operatorname{sen} \alpha,$$

donde $\mathbf{y} = \zeta_{\mathbf{x}} \cap \Lambda$ (justo la $\mathbf{y}$ que aparece en el Lema). De estas dos ecuaciones y el Lema se sigue que

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha} d(\mathbf{x}, \ell).$$



Lo cual demuestra que los planos que no pasan por el origen (los que tienen esferas de Dandelin) intersectan al cono $\mathcal{C}$ en cónicas cuya excentricidad depende de los ángulos (tal como queriamos demostrar).

Obsérvese que no eliminamos a los planos horizontales ($\beta = 0$) de la afirmación anterior. Cuando el plano Π tiende a uno horizontal, la cónica se hace un círculo, el foco $\mathbf{p}$ tiende a su centro y la directriz ℓ se aleja hacia el infinito.

EJERCICIO 2.23 Concluye la demostración de que $\Pi \cap \mathcal{C}$ es una hipérbola cuando las dos esferas de Dandelin de Π estan en los dos lados del cono usando a estas y a los dos focos.

EJERCICIO 2.24 Demuestra que si $\beta = \alpha$ entonces el plano Π tiene una única esfera de Dandelin (el caso de la parábola).

Capítulo 3

Transformaciones

Sin duda, el concepto de función juega un papel fundamental en todas las ramas de la matemática de hoy en día: en la Geometría Elemental (aunque sea viejita), se dice que dos figuras son *Congruentes* si existe una *Transformación Rígida* que lleve una sobre la otra, y que son *Semejantes* si existe una de estas transformaciones que seguida de una *Homotesia* (un cambio de escala) lleve una a la otra; en el Análisis o el Cálculo se estudian las funciones *Integrables* o *Diferenciables*; en la Topología, las funciones *Continuas*; en la Teoría de los Grupos se estudian los *Homomorfismos* (funciones entre grupos que preservan la operación ahí definida); en el Álgebra Lineal se estudian las funciones *Lineales* y las *Afines*; etc., siempre que hay algún tipo interesante de "objetos matemáticos" parece haber una correspondiente noción de "funciones" que los relacionan.

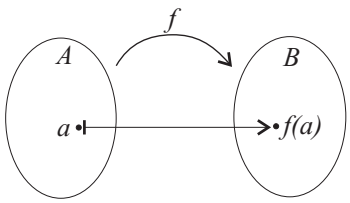
Sin haberlo hecho explicito, los griegos manejaban intuitivamente el concepto de transformación rígida y de semejanza; por ejemplo, en el axioma "todos los ángulos rectos son iguales", en la palabra "iguales" se incluye la idea de que se puede *mover* uno hasta traslaparse sobre el otro, y en sus teoremas de semejanza la noción ya se hace explicita y habla en el fondo de un cierto tipo de funciones. Más adelante, en el surgimiento del Cálculo (Newton y Leibnitz) así como en el de la Geometría Analítica (Descartes) o en el Algebra de los Arabes, las funciones jugaban un papel importante pero debajo del agua o en casos muy concretos (funciones reales de variable real dadas por fórmulas en el Cálculo, por ejemplo). Sin embargo, el aislamiento del concepto de función, la generalidad de la noción —que englobaba cosas al parecer distantes—, es muy reciente: termina de afinarse con la Teoría de los Conjuntos que arranca Cantor en la segunda mitad del XIX. Pero es tan imediata su aceptación (o bien, ya estaba tan madura su concepción) que a principios del Siglo XX, Klein, en una famosísima conferencia (conocida como "El Programa de Erlangen") se avienta el boleto de afirmar que la Geometría es el estudio de un espacio (un conjunto de puntos, piénsese en el plano) junto con un *grupo de transformaciones* (un conjunto específico de funciones del espacio en sí mismo) y de las estructuras que permanecen *invariantes* bajo el grupo. En fin, todavia el estudiante no tiene ejemplos claros de estas nociones

y es casi imposible que lo aprecie. Pero el punto es que, de alguna manera, Klein dijo: para hacer geometría es importantísimo estudiar las *transformaciones* (funciones) del plano en sí mismo, conocerlas de arriba a abajo; y en este Capítulo en esas andamos... pues el Siglo XX, al transcurrir, le fué dando más y más razón al visionario.

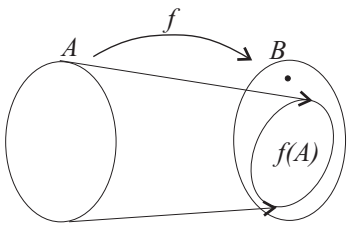
Damos muy rapidamente las nociones generales de función en la primera Sección. Pues, aunque parece que se nos cae el nivel por un ratito, vale la pena establecer cierta terminología muy general que se usa en su manejo y ciertos ejemplos muy particulares que serán de gran interes en el estudio de las transformaciones geométricas, y que a su vez, serviran para familiarizarse con los conceptos básicos. Despues le entramos a las transformaciones geométricas. El orden en que lo hacemos no es el que técnicamente facilita las cosas (empezar por transformaciones lineales), sino el que intuitivamente parece más natural (empezar por transformaciones rígidas); y de ahí, deducir la noción de transformación lineal para regresar de nuevo y desarrollar las fórmulas analíticas.

3.1 Funciones y transformaciones

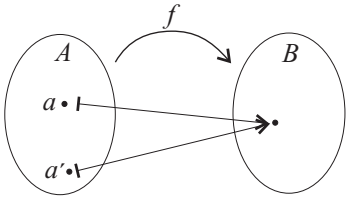
En los siguientes parrafos se usa el tipo de letra *este* para las nociones que se definen formalmente y *este otro* para terminología comoda y coloquial que facilita mucho el manejo de las funciones.



Dados dos conjuntos A y B, una *función* f de A a B, denotado $f : A \to B$, es una manera de *asociar* a cada elemento $a \in A$ un elemento de B, denotado $f(a)$. Por ejemplo, las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se describen comunmente mediante fórmulas como $f(x) = x^2$ o $g(x) = 2x + 3$, que dan la regla para asociar a cada número otro número (e.g., $f(2) = 4$ o $g(-1) = 1$). Otro ejemplo: en el Capítulo 1 vimos las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ que describen rectas parametrizadas. Pero en general, y esa es la maravillosa idea generalizadora (valga el pleonasmo), una función no tiene porque estar dada por una fórmula; a veces es algo dado por "Dios", una "caja negra", que "sabe" como asociarle a los elementos del *dominio* (el conjunto A, en la notación con que empezamos) elementos del *contradominio* B.



Se dice que una función $f : A \to B$ es *inyectiva* si $f(a) = f(a')$ implica que $a = a'$. Es decir, si elementos diferentes de A *van bajo* f a elementos diferentes de B ($a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$). Se dice que una función $f : A \to B$ es *suprayectiva* o *sobre* si para cada elemento de B hay uno en A que le "*pega*", es decir, si para cada $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Y se dice que es *biyectiva*, si es inyectiva y suprayectiva; también se le llama *correspondencia biunívoca*. (Diagramas de funciones **no** inyectiva y **no** sobre en las figuras adjuntas).

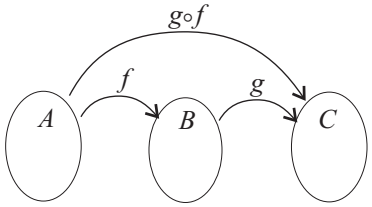


Las funciones tienen una noción natural de composición, al aplicarse una tras otra para dar una nueva función. Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$, su *composición*, denotada $g \circ f$ y a veces llamada *f seguida de g* o bien "*g bolita f* ", es la función

$$g \circ f : A \to C$$

definida por la fórmula

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \ .$$



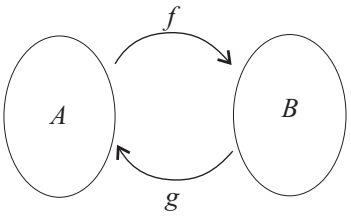
Hay que resaltar que la composición de funciones está definida sólo cuando el *dominio* de g (es decir, de donde "*sale*" o en donde está definida, el conjunto B en nuestro caso) es igual al *contradominio* de f (es decir, a donde "*llega*", el final de la flecha, donde "*caen*", otra vez B en nuestro caso); si no fuera así, "g no sabría que hacerle a algunos $f(a)$". También hay que resaltar que la dirección de la escritura "*g bolita f* " es la contraria a la de la acción o lectura ("*f* seguida de *g*" o bien "*f compuesta con g*"); y esto se ha convenido por la costumbre así, pues la fórmula, que a final de cuentas es quien manda, queda mucho más natural.

Por ejemplo, con las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que definimos con fórmulas unos parrfos arriba se tiene que $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 3$ mientras que $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 12x + 9$, asi que <u>sí</u> importa el orden; la composición está lejos de ser conmutativa; en general, aunque $g \circ f$ esté definida, $f \circ g$ ni siquiera tiene sentido.

Cada conjunto A, trae consigo una función llamada su *identidad* definida por

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{id}_A : A & \to & A \\ \mathrm{id}_A(a) & = & a \end{array}$$

que es la función que no *hace* nada, que deja a todos en su lugar. Y, aunque parezca inocua, es fundamental darle un nombre, pues entonces podemos escribir mucho, por ejemplo:



Lema 3.1.1 *Dada una función $f : A \to B$, se tiene*

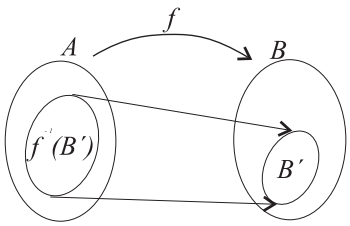
$$\begin{array}{lrcll} \textbf{\textit{i)}} & f \text{ es inyectiva} & \Leftrightarrow \exists & g : B \to A & \text{tal que} \quad g \circ f = \mathrm{id}_A \\ \textbf{\textit{ii)}} & f \text{ es suprayectiva} & \Leftrightarrow \exists & g : B \to A & \text{tal que} \quad f \circ g = \mathrm{id}_B \end{array}$$

EJERCICIO 3.1 Da ejemplos de funciones inyectivas que no son sobre y a la inversa.

EJERCICIO 3.2 Demuestra el lema anterior y el siguiente corolario de él.

Corolario 3.1.1 *Dada una función $f : A \to B$, entonces f es biyectiva si y sólo si existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ g = \mathrm{id}_B$.*

En este caso, a g se le da el nombre de *inversa* de f y se le denota f^{-1}. Aunque aquí hay que hacer notar que el simbolito f^{-1} se usa también de una manera más general para denotar conjuntos. Pues, para cualquier subconjunto $B' \subset B$ podemos definir su *imágen inversa* $f^{-1}(B') \subset A$ como



$$f^{-1}(B') := \{a \in A \mid f(a) \in B'\} \ .$$

Tenemos entonces que f es inyectiva si y sólo si para todo $b \in B$ se tiene que $\sharp f^{-1}(b) \leq 1$ (donde $\sharp$ denota cardinalidad y hemos identificado $f^{-1}(b)$ con $f^{-1}(\{b\})$), es decir, "a cada elemento de B le pega a lo más uno de A"; y que f es sobre si y sólo si para todo $b \in B$ se tiene que $\sharp f^{-1}(b) \geq 1$ (es decir, que $f^{-1}(b)$ no es el *conjunto vacio*). Por lo tanto, f es biyectiva si y sólo si $\sharp f^{-1}(b) = 1$ para todo $b \in B$, es decir, si y sólo si f^{-1} es una función bien definida al aplicarla a *singuletes* de B.

También se puede definir la *imágen directa* de subconjuntos $A' \subset A$, o simplemente su *imágen*, como

$$f(A') := \{f(a) \mid a \in A'\} \subset B \ .$$

Finalmente llegamos a la definición que más nos interesa.

Definición 3.1.1 Una *transformación* de A es una función biyectiva de A en A.

Hay que hacer notar que el término "transformación" se usa de diferentes maneras en otros textos y en otros contextos. Pero aquí estaremos tan enfocados a funciones biyectivas de un conjunto en sí mismo que lo asignaremos a ellas.

EJERCICIO 3.3 Demuestra que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son biyectivas entonces $g \circ f$ también es biyectiva. (Demuestra que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$).

EJERCICIO 3.4 Demuestra que si f y g son transformaciones de un conjunto A entonces $(f \circ g)$ también es una transformación de A.

3.1.1 Grupos de Transformaciones

Veremos ahora ejemplos "chiquitos" de ciertos conjuntos de transformaciones, que por su importancia reciben un nombre especial, el de *grupo*.

Consideremos un conjunto con dos elementos, $\{0, 1\}$; llamémoslo Δ_2. Las funciones de Δ_2 en sí mismo son 4:

$$\begin{array}{ccc} \text{id} & & c_0 \\ 0 \longmapsto 0 & & 0 \longmapsto 0 \\ 1 \longmapsto 1 & & 1 \longmapsto 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & c_1 & \\ 0 & \longmapsto & 1 \\ 1 & \longmapsto & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \rho & \\ 0 & \longmapsto & 1 \\ 1 & \longmapsto & 0 \end{array}$$

donde hemos usado la notación $x \longmapsto y$ para especificar que el elemento x va a dar al elemento y bajo la función en cuestión (no hay que confundir la flechita con "raya

de salida" $\longmapsto$ con la flecha $\rightarrow$ que denota función; puede inclusive pensarse que esta última ($\rightarrow$) es el conjunto de todas las flechitas ($\longmapsto$) entre los elementos). En nuestro ejemplo, las dos funciones de enmedio son *funciones constantes*; y las únicas transformaciones son las de los extremos, id y ρ, donde obsérvese que ρ es su propio inverso, es decir, $\rho \circ \rho = \mathrm{id}$.

Consideremos ahora a $\Delta_3 := \{0, 1, 2\}$, un conjunto con tres elementos. Una función de Δ_3 en sí mismo puede especificarse por una tablita

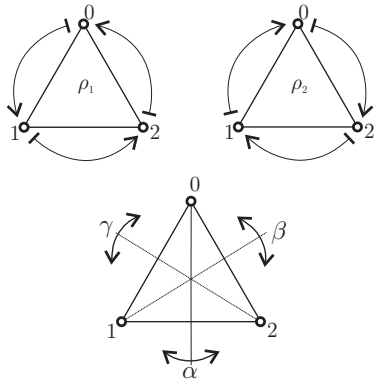
$$\begin{array}{ccc} 0 & \longmapsto & x \\ 1 & \longmapsto & y \\ 2 & \longmapsto & z \end{array}$$

donde $x, y, z \in \Delta_3$. Como las imágenes ($x, y, z \in \Delta_3$) son arbitrarias, tenemos que hay $3^3 = 27$ funciones en total; pero de estas solamente $3 \times 2 \times 1 = 6$ son transformaciones. Pues si queremos que sea biyectiva, una vez que el 0 *escoje* su imágen, al 1 solo le quedan dos opciones para escoger y cuando lo hace, el 2 ya no le queda más que una opción obligada.

Estas 6 transformaciones son

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{id} & & \rho_1 \\ 0 \longmapsto 0 & & 0 \longmapsto 1 \\ 1 \longmapsto 1 & & 1 \longmapsto 2 \\ 2 \longmapsto 2 & & 2 \longmapsto 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \rho_2 \\ 0 \longmapsto 2 \\ 1 \longmapsto 0 \\ 2 \longmapsto 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \alpha & & \beta \\ 0 \longmapsto 0 & & 0 \longmapsto 2 \\ 1 \longmapsto 2 & & 1 \longmapsto 1 \\ 2 \longmapsto 1 & & 2 \longmapsto 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \gamma \\ 0 \longmapsto 1 \\ 1 \longmapsto 0 \\ 2 \longmapsto 2 \end{array}$$



que podemos visualizar como las "simetrías" de un triángulo equilatero. Vistas así, las tres de arriba corresponden a rotaciones (la identidad rota 0 grados), y cumplen que ρ_1 y ρ_2 son inversas, es decir $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1 = \mathrm{id}$, correspondiendo a que una rota 120° en una dirección y la otra 120° en la dirección contraria. Pero también cumplen que $\rho_1 \circ \rho_1 = \rho_2$ (que podríamos escribir $\rho_1^2 = \rho_2$ si convenimos en que

$$f^n = \overbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}^{n}$$

donde f es cualquier transformación; es decir, f^n es f compuesta consigo misma n-veces, lo cual tiene sentido sólo cuando f sale de y llega a el mismo conjunto). Por su parte, las tres transformaciones de abajo se llaman *transposiciones* y geométricamente se ven como *reflexiones*. Cumplen que $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \mathrm{id}$, y además cumplen otras *relaciones* como que $\alpha \circ \beta = \rho_1$, lo cual se ve *persiguiendo* elementos:

$$\begin{array}{ccccc} & \beta & & \alpha & \\ 0 & \longmapsto & 2 & \longmapsto & 1 \\ 1 & \longmapsto & 1 & \longmapsto & 2 \\ 2 & \longmapsto & 0 & \longmapsto & 0 \end{array} ;$$

o bien, que $\alpha \circ \beta \circ \alpha = \beta \circ \alpha \circ \beta = \gamma$ (¡compruébelo persiguiendo elementos!). Para poder concluir con elegancia, conviene introducir las siguientes nociones generales. Hay ciertos conjuntos de transformaciones que son tan importantes que conviene darles un nombre específico, el de **grupo:**

Definición 3.1.2 A un conjunto G de transformaciones de un conjunto A se le llama un *grupo de transformaciones* de A si cumple

$$\begin{aligned} \textbf{i).-} &\quad \mathrm{id}_A \in G \\ \textbf{ii).-} &\quad f, g \in G \Rightarrow g \circ f \in G \\ \textbf{iii).-} &\quad f \in G \Rightarrow f^{-1} \in G \end{aligned}$$

El ejemplo trivial de un grupo sería el conjunto de todas las transformaciones de A.

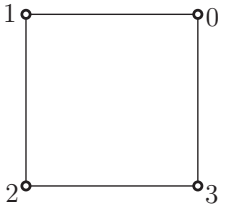
En el caso de $A = \Delta_3$, el grupo de todas sus transformaciones tiene 6 elementos; pero también hay otro grupo de transformaciones que consiste en las tres del primer renglón, las rotaciones; pues contienen a la identidad (es un conjunto no vacio), es *cerrado bajo composición* (cumple **(ii)**) y es *cerrado bajo* inversas (cumple **(iii)).** Y también cada una de las transposiciones (o reflexiones) junto con la identidad forman un grupo (con dos elementos) de transformaciones de Δ_3.

Dado un conjunto cualquiera de transformaciones de A, el grupo que *genera* es el grupo de transformaciones que se obtiene de todas las posibles composiciones con elementos de él o sus inversos.

Por ejemplo, α y β generan todas las transformaciones de Δ_3 (pues ya las hemos descrito como composiciones de α y β); mientras que ρ_1 genera el grupo de rotaciones de Δ_3 (que consiste de id, ρ_1 y $\rho_1^2 = \rho_2$). Las *relaciones* que cumplen α y β son

$$\alpha^2 = \beta^2 = (\beta \circ \alpha)^3 = \mathrm{id}$$

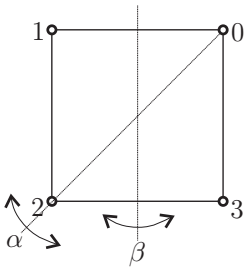
Si consideramos ahora a $\Delta_4 := \{0, 1, 2, 3\}$, tendríamos que el conjunto de sus funciones tiene $4^4 = 256$ elementos, mientras que el grupo de todas sus transformaciones tiene $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ elementos (demasiados para escribirlos todos). Pero dentro de este, podemos encontrar otros grupos, que podemos llamar *subgrupos*.



Uno importante es el de aquellas transformaciones que mantienen intacta (que *preservan*) la estructura del cuadrado regular cuyos vétrices se etiquetan $0, 1, 2, 3$ en orden cíclico; por ejemplo, la que mantiene fijos al 0 y al 1 pero que transpone al 2 y al 3 no preserva al cuadrado pues, e.g., la arista del 1 al 2 va a una diagonal, la $1 - 3$. No es dificil ver que éstas (las *simétrias* del cuadrado) son 8: las cuatro rotaciones (incluyendo a la identidad), y 4 reflexiones.

Pero en vez de escribirlas todas podemos describirlas mediante *generadores*. Sean ahora

$$\begin{array}{cccc} & \alpha & & \\ 0 & \mapsto & 0 & \\ 1 & \mapsto & 3 & \\ 2 & \mapsto & 2 & \\ 3 & \mapsto & 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & \beta & & \\ 0 & \mapsto & 1 & \\ 1 & \mapsto & 0 & \\ 2 & \mapsto & 3 & \\ 3 & \mapsto & 2 & \end{array} \tag{3.1}$$



entonces $\beta \circ \alpha$ es la rotación $(0 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 0)$ y las otras dos rotaciones del cuadrado son $(\beta \circ \alpha)^2$ y $(\beta \circ \alpha)^3$; mientras que las dos reflexiones que faltan describir son $(\alpha \circ \beta \circ \alpha)$ y $(\beta \circ \alpha \circ \beta)$. Podemos entonces concluir que el grupo de simetrías del cuadrado está generado por α y β que cumplen las relaciones

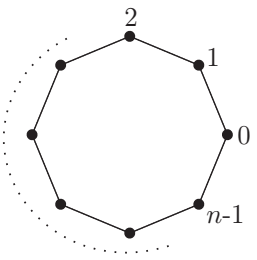
$$\alpha^2 = \beta^2 = (\beta \circ \alpha)^4 = \mathrm{id}$$

mientras que el grupo de rotaciones tiene un solo generador $\rho = (\beta \circ \alpha)$ que cumple $\rho^4 = \mathrm{id}$.

Para referencia posterior, y a reserva de que se estudien con más detenimiento en el caso general en la Sección ??, conviene ponerle nombre a los grupos de transformaciones que hemos descrito.

Al conjunto de todas las transformaciones de un conjunto con n elementos $\Delta_n := \{0, 1, ..., n-1\}$ se le llama el *grupo simétrico de orden n*; se le denota $\mathbf{S}_n$ y consta de $n! := n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$ (n factorial) elementos también llamados *permutaciones*.

Dentro de este grupo hemos considerado dos subgrupos (para $n = 3, 4$): el que preserva la estructura del polígono regular con n lados cuyos vértices se etiquetan $0, 1, 2, ..., (n-1)$ en orden cíclico, a quién se le llama el *grupo diedrico de orden n*, y se le denota $\mathbf{D}_n$, que tiene $2n$ elementos; y el subgrupo de éste generado por la *rotación* $(0 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto ... \mapsto (n-1) \mapsto 0)$ que tiene n elementos, se le llama *grupo cíclico de orden n* y se le denota $\mathbf{C}_n$. Hay que observar que para $n = 3$ el diédrico y el simétrico coinciden ($\mathbf{S}_3 = \mathbf{D}_3$) pero esto ya no sucede para $n = 4$; y que para $n = 2$, los tres coinciden ($\mathbf{S}_2 = \mathbf{D}_2 = \mathbf{C}_2$) porque Δ_2 es muy chiquito.



EJERCICIO 3.5 Para el caso $n = 4$, escribe explícitamente (en forma de tabla de asignaciones) las ocho transformaciones del grupo diédrico $\mathbf{D}_4$; su expresión más económica (en el número de símbolos usados) como composición de α y β (definidas por las tablas de asignaciones (3.1)), y también da su representación geométrica.

EJERCICIO 3.6 ¿Puedes encontrar un subgrupo de $\mathbf{S}_4$ "escencialmente igual" a $\mathbf{S}_3$?

EJERCICIO 3.7 ¿Puedes encontrar un subgrupo de $\mathbf{S}_4$ de orden 12? (Piensa en un tetraedro regular en $\mathbb{R}^3$ y describe al grupo geométricamente.)

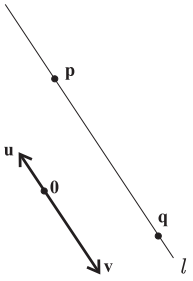
EJERCICIO 3.8 ¿Puedes encontrar una permutacion $\gamma : \Delta_4 \to \Delta_4$ tal que α, β y γ generen todas las permutaciones $\mathbf{S}_4$ (por supuesto que $\gamma_i \notin \mathbf{D}_4$)?

EJERCICIO 3.9 Da explicitamente (con la tabla de asignación $\Delta_n \to \Delta_n$) dos generadores α y β para los grupos diédricos de orden $n = 5$ y $n = 6$ (es decir, para las simetrías del pentágono y el hexágono). ¿Qué relaciones cumplen? ¿Puedes intuir y describir lo equivalente para el caso general?

* EJERCICIO 3.10 Considera un cubo regular Q en $\mathbb{R}^3$. Etiqueta sus vértices con Δ_8. Dentro de $\mathbf{S}_8$ hay un subgrupo que es el que preserva la estructura geométrica del cubo. ¿Cuántos elementos tiene? ¿Puedes describirlo con generadores y relaciones?

3.2 Las transformaciones afines de $\mathbb{R}$

El primer grupo de transformaciones geométrico-analíticas que estudiaremos es el que surge de la ambigüedad en la parametrización de rectas. Recuérdese que nuestra definición original de una recta fué con un parametro real, pero para una sola recta hay muchas parametrizaciones (dependen de escoger un punto base y un vector direccional); la forma de relacionarse de estos parametros serán las transformaciones afínes.



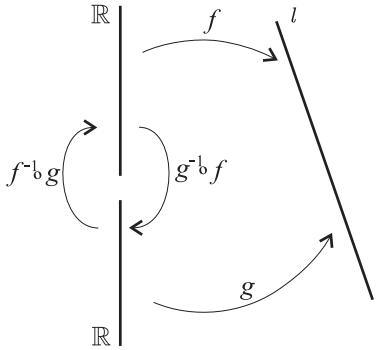
Supongamos que tenemos una misma recta ℓ parametrizada de dos maneras distintas. Es decir, que tenemos

$$\begin{aligned} \ell &= \{\mathbf{p} + t\,\mathbf{v} : t \in \mathbb{R}\} \\ \ell &= \{\mathbf{q} + s\,\mathbf{u} : s \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ (aunque también funcione el razonamiento que sigue en cualquier espacio vectorial). Sabemos además que los vectores direccionales, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son distintos de $\mathbf{0}$ para que efectivamente describan una línea recta. La pregunta es ¿cómo se relacionan los parametros t y s?

Otra manera de pensar estas rectas es como la imagen de funciones cuyo dominio son los reales, es decir, tenemos dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathbf{p} + t\,\mathbf{v} \\ g(s) &= \mathbf{q} + s\,\mathbf{u} \end{aligned}$$



cuya imagen es la misma recta ℓ. Puesto que son ambas biyecciones sobre ℓ, podemos restringir el codominio y pensarlas a ambas como funciones de $\mathbb{R}$ en ℓ. Y entonces tiene sentido hablar de sus inversas $f^{-1} : \ell \to \mathbb{R}$ y $g^{-1} : \ell \to \mathbb{R}$. La pregunta es entonces ¿quiénes son las funciones $(g^{-1} \circ f)$ y $(f^{-1} \circ g)$ que van de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$?

Puesto que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos (definen la misma recta), existe un número real $a \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{u} = a\,\mathbf{v}$; de hecho $a = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \,/\, (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$, y obsérvese que $a \neq 0$. Y además como $\mathbf{q} \in \ell$ se puede expresar en términos de la primera parametrización; es decir, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{q} = f(b) = \mathbf{p} + b\,\mathbf{v}$. Tenemos entonces que para cualquier $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g(s) &= \mathbf{q} + s\,\mathbf{u} \\ &= \mathbf{p} + b\,\mathbf{v} + s(a\,\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{p} + (as + b)\,\mathbf{v} \\ &= f(as + b) \end{aligned}$$

aplicando la función f^{-1} a ambos lados de esta ecuación se obtiene

$$(f^{-1} \circ g)(s) = as + b$$

Para obtener la otra composición, podemos proceder más directamente, tomando a esta última expresión como la que da al parametro t. Es decir

$$t = as + b$$

de donde, como $a \neq 0$, podemos despejar

$$s = a^{-1}t - ba^{-1}$$

Definición 3.2.1 Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama *afín* si se escribe como

$$f(x) = ax + b \tag{3.2}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$; y cuando $a \neq 0$ la llamaremos *transformación afín*.

Nuestro uso de el término transformación se justifica por el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 3.11 Demuestra que la función afín (3.2) es biyectiva sí y sólo sí $a \neq 0$.

EJERCICIO 3.12 Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2x+1$ y $g(x) = -x+2$. Encuentra las fórmulas para f^{-1}, g^{-1}, f^2, $f \circ g$ y $g \circ f$.

EJERCICIO 3.13 Demuestra que las transformaciones afines son cerradas bajo inversas y composición.

Obsérvese que las gráficas de las funciones afines son las rectas no verticales, pues estas están dadas por la ecuación $y = ax+b$. Y que de estas las rectas no horizontales corresponden a las transformaciones afines.

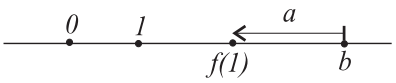
Al conjunto de todas las transformaciones afines de $\mathbb{R}$, que por el ejercicio anterior forman un grupo, lo denotaremos $\mathbf{Af}(1)$.

Podemos ahora resumir lo que hicimos en los parrafos anteriores.

Lema 3.2.1 *Dos parametrizaciones de una misma recta se relacionan por una transformación afín entre los parámetros.* □

Así como las parametrizaciones de rectas dependen de escoger dos puntos en ellas, las transformaciones afines dependen unicamente de dos valores. Pues las constantes que la definen, a y b en nuestro caso (3.2), se obtienen como

$$\begin{aligned} b &= f(0) \\ a &= f(1) - f(0) \end{aligned}$$



y representan un cambio de escala (multiplicar por a) y luego una translación (sumarle b). De tal manera que si nos dicen que f es una función afín que manda al 0 en b ($f(0) = b$) y al 1 en c ($f(1) = c$), recuperamos toda la función por la fórmula

$$f(x) = (c - b)\, x + b$$

y obsérvese que es transformación cuando $f(0) \neq f(1)$ y si no es constante. Si el 0 y el 1 pueden ir a cualquier pareja de números por una transformación afín, entonces cualquier pareja de números (distintos) puede ser enviada al 0, 1 (por la inversa) y de ahí a cualquier otra pareja. Hemos demostrado:

Teorema 3.2.1 (Dos en Dos) *Dados dos pares de puntos x_0, x_1 y y_0, y_1 en $\mathbb{R}$, (donde por par se entiende que son distintos, i.e., $x_0 \neq x_1$ y $y_0 \neq y_1$), existe una única transformación afín $f \in \mathbf{Af}(1)$ que manda una en la otra, i.e., tal que $f(x_0) = y_0$ y $f(x_1) = y_1$.* □

EJERCICIO 3.14 Encuentra la transformación afín $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple:

a). $f(2) = 4$ y $f(5) = 1$
b). $f(1) = -1$ y $f(2) = 3$
c). $f(-1) = 0$ y $f(3) = 2$

EJERCICIO 3.15 Encuentra la fórmula explicita (en términos de x_0, x_1,y_0, y_1) de la función f del Teorema anterior.

EJERCICIO 3.16 Discute qué pasa en el Teorema (y en la fórmula del ejercicio) anterior si se permite que en los pares se de la igualdad.

3.2.1 Isometrías de $\mathbb{R}$

Hemos dicho que las transformaciones afines de la recta consisten de un "cambio de escala" (determinado por la constante a) y luego una translación (determinada por b). Pero podemos ser más precisos. Como la distancia en $\mathbb{R}$ se mide por la fórmula $d(x, y) = |x - y|$, podemos demostrar que todas las distancias cambian por el mismo factor bajo la transformación afín $f(x) = ax + b$:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= |ax + b - (ay + b)| = |ax - ay| \\ &= |a(x - y)| = |a|\,|x - y| = |a|\, d(x, y) \end{aligned}$$

Tenemos entonces una familia distinguida de transformaciones afines que son las que **no** cambian la escala, las que mantienen rígida a la recta real y que llamaremos *isometrías* de $\mathbb{R}$ pues preservan la métrica (la distancia). Denotemos

$$\mathbf{Iso}(1) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b \quad \text{con} \quad |a| = 1\}$$

(dejamos como ejercicio fácil demostrar que es un grupo de transformaciones).

Tenemos que $\mathbf{Iso}(1)$ se divide naturalmente en dos clases de transformaciones: las *translaciones*, cuando $a = 1$ (y la función es entonces $f(x) = x + b$) que consisten en deslizar a la recta rígidamente hasta que el 0 caiga en b; o bien las *reflexiones*, cuando $a = -1$ y que entonces se escriben $g(x) = -x + b$. Veámos que estas últimas tienen un *punto fijo*, es decir, un punto que se queda en su lugar bajo la transformación. Este debe satisfacer la ecuación $g(x) = x$ que es

$$x = -x + b$$

y que implica $x = b/2$. Entonces, lo que hacen las reflexiones es intercambiar rigidamente los dos lados de un punto que podemos llamar su *espejo* (pues por ejemplo, $g(b/2 + 1) = b/2 - 1$ y en general se tiene que $g(b/2 + x) = b/2 - x$), y de ahí el nombre de "reflexión".

EJERCICIO 3.17 Demuestra que $\mathbf{Iso}(1)$ es un grupo de transformaciones de $\mathbb{R}$.

EJERCICIO 3.18 Demuestra que las translaciones de $\mathbb{R}$, que denotaremos $\mathbf{Tra}(1)$, forman un grupo de transformaciones.

EJERCICIO 3.19 Demuestra que si $f \in \mathbf{Af}(1)$ no tiene puntos fijos, es decir, que $f(x) \neq x$ para toda $x \in \mathbb{R}$, entonces es una translación no trivial (la trivial es transladar por 0, que es la identidad y tiene a todo $\mathbb{R}$ como puntos fijos).

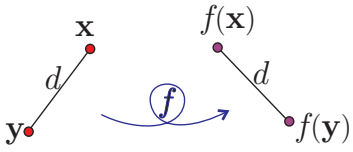
EJERCICIO 3.20 Demuestra, usando la fórmula, que la inversa de cualquier reflexión es ella misma.

EJERCICIO 3.21 Demuestra que la composición de dos reflexiones es una translación del doble de la distancia (dirigida) entre sus espejos.

3.3 Isometrías y Transformaciones Ortogonales

En esta sección se estudian las transformaciones más importantes para la geometría euclidiana en su sentido estricto, pues son las que preservan la métrica, la noción de distancia, y por lo tanto la estructura rígida de las figuras geométricas. Puesto que la definición general es intuitivamente nítida, partiremos de ella y deduciremos las propiedades básicas de las isometrías que nos llevarán, en las secciones siguientes, a obtener las fórmulas explicitas que las definen y que entonces nos facilitarán la obtención de nuevos resultados y su comprensión cabal.

Es importante señalar que muchos de los resultados de esta sección, asi como las definiciones, solo dependen de las nociones de distancia y producto interior en un espacio vectorial. Asi que procederemos en general, (para $n = 1, 2, 3$, puede pensarse) y hasta el final de la sección, salvo por los ejemplos, concretaremos los resultados al plano.



Definición 3.3.1 Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una *isometría* si preserva distancia. Es decir, si para todo par $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se cumple

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \ .$$

También se les llama *transformaciones rígidas* (aunque cobré sentido esta terminología hasta que demostremos que son biyectivas). Se denota por $\mathbf{Iso}(n)$ al conjunto de todas las isometrías de $\mathbb{R}^n$.

Nótese que la definición tiene sentido en cualquier espacio métrico, y que coincide para $n = 1$ con las de la sección anterior. Las isometrías mandan al espacio en sí mismo de manera tal que cualquier estructura rígida se mantiene. Estas funciones o transformaciones las vemos a diario. Por ejemplo, mover una silla de un lugar a otro induce una isometría si pensamos que el espacio euclidiano se puede generar y definir en relación a ella; el efecto de esta isometría en la silla es ponerla en su destino.

Antes de ver más ejemplos en detalle, demostraremos tres lemas generales que usan solamente la definición de isometría y tienden hacía la demostración de que las isometrías forman un grupo de transformaciones.

Lema 3.3.1 *Una isometría $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva.*

Demostración. Esto se debe a que la distancia entre puntos diferentes es estrictamente positiva. Formalmente, supongamos que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ son tales que $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$. Esto implica que $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = 0$. Como f es isometría, entonces $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = 0$ y por lo tanto que $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. □

Lema 3.3.2 *Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ son isometrías entonces $g \circ f$ también lo es.*

Demostración. Usando la regla de composición y la definición de isometría dos veces (primero para g y luego para f), se obtiene que para cualquier $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} d((g \circ f)(\mathbf{x}), (g \circ f)(\mathbf{y})) &= d(g(f(\mathbf{x})), g(f(\mathbf{y}))) \\ &= d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \\ &= d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

y por tanto $g \circ f \in \mathbf{Iso}(n)$. □

Lema 3.3.3 *Si $f \in \mathbf{Iso}(n)$ y tiene inversa f^{-1}, entonces $f^{-1} \in \mathbf{Iso}(n)$.*

Demostración. Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $d(f^{-1}(\mathbf{x}), f^{-1}(\mathbf{y})) = d(f(f^{-1}(\mathbf{x})), f(f^{-1}(\mathbf{y})))$ pues f es isometría; pero la última expresión es $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, lo cual demuestra que $f^{-1} \in \mathbf{Iso}(n)$. □

Nos falta entonces demostrar que las isometrías son suprayectivas para concluir que $\mathbf{Iso}(n)$ es un grupo de transformaciones. Aunque esto sea intuitivamente claro ("una transformación rígida del plano no puede dejar partes descobijadas"), la demostración sería ahorita complicada; con un poco más de técnica será muy sencilla. Así que vale suponer que es cierto por un rato, desarrollar los ejemplos, la intuición y la técnica y luego volver a preocuparnos.

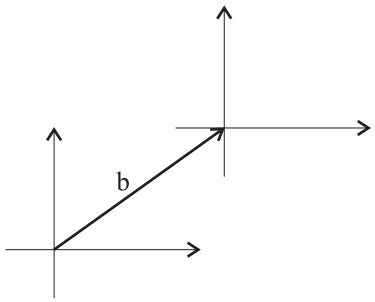
3.3.1 Ejemplos

Ya hemos visto los ejemplos en la recta (cuando $n = 1$), que son translaciones y reflexiones. Ejemplos en el plano serían rotar alrededor de un punto fijo, reflejar en una recta o bien, transladar por un vector fijo a todo el plano. Estas últimas son muy fáciles de definir:

Translaciones

Dado un vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, la *translación por* $\mathbf{b}$, es la función

$$\begin{aligned} \tau_{\mathbf{b}} &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ \tau_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} + \mathbf{b} \end{aligned}$$



que claramente es una transformación (inyectiva, pues $\mathbf{x}+\mathbf{b} = \mathbf{y} + \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$; y sobre, puesclaramente $\tau_{\mathbf{b}}^{-1} = \tau_{-\mathbf{b}}$). Y además es una isometría ($\tau_{\mathbf{b}} \in \mathbf{Iso}(n)$) pues

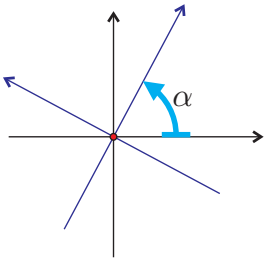
$$\begin{aligned} d(\tau_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}),\tau_{\mathbf{b}}(\mathbf{y})) &= |\tau_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) - \tau_{\mathbf{b}}(\mathbf{y})| \\ &= |(\mathbf{x} + \mathbf{b}) - (\mathbf{y} + \mathbf{b})| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ . \end{aligned}$$

De hecho las translaciones forman un grupo de transformaciones de $\mathbb{R}^n$, al que denotaremos $\mathbf{Tra}(n)$. Que puede identificarse con el grupo aditivo $\mathbb{R}^n$, en lenguaje de grupos "son *isomorfos*", pues hay una translación por cada elemento de $\mathbb{R}^n$, y su regla de composición es claramente

$$\tau_{\mathbf{b}} \circ \tau_{\mathbf{a}} = \tau_{(\mathbf{a}+\mathbf{b})} \ .$$

Rotaciones

Definir explicitamente a las rotaciones es más dificil, aunque intuitivamente sea claro a que nos referimos: "clavar una tachuela en algún punto y luego rotar al plano alrededor de ella un cierto ángulo". Usando coordenadas polares sí es fácil definir la rotación de un ángulo α alrededor del origen, pues al ángulo de cualquier vector simplemente le sumamos el ángulo de rotación. Así que podemos definir la *rotación de un ángulo* α alrededor del origen como

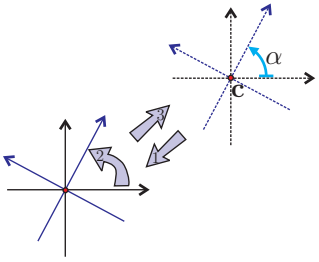


$$\begin{aligned} \rho_\alpha &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \rho_\alpha(\theta, r) &= (\theta + \alpha, r) \quad \text{(en coordenadas polares)} \end{aligned}$$

Nótese que entonces $\rho_0 = \rho_{2\pi} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ y se cumple, como en las translaciones, que

$$\rho_\beta \circ \rho_\alpha = \rho_{(\alpha+\beta)}$$

pero ahora sumando ángulos. Además son transformaciones (biyectivas, insistimos una vez más) pues tienen inversa $\rho_\alpha^{-1} = \rho_{-\alpha}$ de tal manera que las rotaciones alrededor del origen forman un grupo de transformaciones de $\mathbb{R}^2$ (isomorfo al de los ángulos con la suma: los elementos de este grupo —transformaciones por definición, que más adelante denotaremos por $\mathrm{SO}(2)$— están en correspondencia uno a uno con los puntos del círculo unitario $\mathbb{S}^1$ de tal manera que la composición correponde a la suma de ángulos.)



Ahora, usando a las translaciones podemos definir las rotaciones con centro en cualquier otro lado con un truco llamado *conjugación*. Para obtener la rotación de un ángulo α con centro en el punto $\mathbf{c}$, denotémosla $\rho_{\alpha,\mathbf{c}}$, podemos llevar al centro $\mathbf{c}$ al origen por medio de la translación $\tau_{-\mathbf{c}}$, rotamos ahí y luego regresamos a $\mathbf{c}$ a su lugar; es decir, podemos definir

$$\rho_{\alpha,\mathbf{c}} = \tau_{\mathbf{c}} \circ \rho_\alpha \circ \tau_{-\mathbf{c}}$$

Aunque sea intuitivamente cristalino que las rotaciones son isometrías (se puede rotar un vidrio), no tenemos aún una demostración formal de ello; y con coordenadas polares se ve "en chino" pues expresar distancias (o translaciones) en términos de ellas está idem. Mejor nos esperamos a tener buenas expresiones cartesianas de las rotaciones para demostrar que preservan distancias y que al componer dos rotaciones cualesquiera se obtiene otra (el problema ahorita es encontrar su centro). Y entonces veremos que junto con las translaciones forman el grupo de *movimientos rígidos del plano*, llamados asi pues se puede llegar a cualquiera de estas transformaciones *moviendo* continuamente (poco a poco) al plano.

EJERCICIO 3.22 Demuestra formalmente (con las definiciones anteriores) que el conjunto de rotaciones alrededor de un punto dado $\mathbf{c}$ es un grupo.

EJERCICIO 3.23 ¿Puedes encontrar el centro de la rotación de 90° que se obtiene rotando 45° en el origen y luego rotando otros 45° en el punto $(2,0)$? (Haz dibujos —o juega con tachuelas y un acetato sobre un papel cuadriculado— y busca a un punto que se quede en su lugar despues de las dos rotaciones.) ¿Cuál es el centro de rotación si se invierte el orden de la composición?

EJERCICIO 3.24 En base a tu experiencia con el ejercicio anterior, y sin preocuparte de formalidades, ¿puedes dar una receta geométrica para encontrar el centro de rotación de la composición de dos rotaciones (con centros distintos, por supuesto)?

EJERCICIO 3.25 ¿Puedes conjeturar qué transformación es $\rho_{-\alpha,\mathbf{b}} \circ \rho_{\alpha,\mathbf{c}}$? ¿Puedes demostrarlo? Si no ¿qué hace falta?

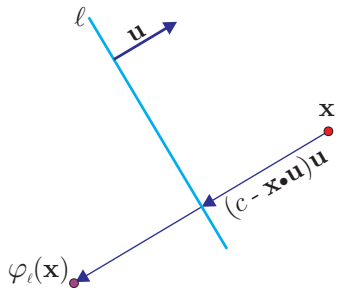
Reflexiones

Las reflexiones (que intercambian rígidamente los dos lados de una "linea espejo") las podemos definir usando la proyección ortogonal a una recta. Dada una recta $\ell \subset \mathbb{R}^2$, se le puede definir por la ecuación normal $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = c$ con $\mathbf{u}$ un vector unitario y $c \in \mathbb{R}$ una constante (lo que habíamos llamado ecuación unitaria). Sabemos que para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ el vector que lleva a $\mathbf{x}$ ortogonalmente a la recta ℓ es

$$(c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\,\mathbf{u}$$

pues

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{x} + (c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\,\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} + (c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = c\ .$$



Entonces, el reflejado de $\mathbf{x}$ en el *espejo* ℓ será *empujarlo* otro tanto del otro lado de ℓ. Asi que definimos la *reflexión* de $\mathbb{R}^2$ a lo largo de $\ell : \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = c$ (con $|\mathbf{u}| = 1$) como

$$\begin{aligned} \varphi_\ell &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \varphi_\ell(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} + 2\,(c - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\,\mathbf{u}\ . \end{aligned}$$

Obsérvese que no nos preocupamos de las propiedades de grupo respecto a las reflexiones porque **no** lo son. Ni siquiera contienen a la identidad.

EJERCICIO 3.26 Usando coordenadas (x, y) da fórmulas más sencillas para las reflexiones en los ejes coordenados y verífica que coinciden con la fórmula anterior.

EJERCICIO 3.27 Usando coordenadas da fórmulas sencillas para las reflexiones en las rectas $x = y$ y $x = -y$.

EJERCICIO 3.28 Usando coordenadas da fórmulas sencillas para las reflexiones en las rectas $x = c$ y $y = c$ donde c es cualquier constante.

EJERCICIO 3.29 Define reflexiones en planos de $\mathbb{R}^3$.

EJERCICIO 3.30 Demuestra que las reflexiones son isometrías.

EJERCICIO 3.31 Demuestra que si φ es una reflexión, entonces $\varphi^{-1} = \varphi$.

EJERCICIO 3.32 Demuestra que si φ_ℓ es la reflexión en la recta ℓ, entonces $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ es un punto fijo de φ_ℓ, i.e. $\varphi_\ell(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, si y sólo si $\mathbf{x} \in \ell$.

3.3.2 Grupos de Simetrías

Supongamos por un ratito (luego lo demostraremos) que las isometrías de $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$) forman un grupo (algo que no es dificil de creer). Entonces podemos definir los "grupos de simetrías" de las figuras, en el plano o de los cuerpos en el espacio, correspondiendo a nuestra intuición milenaria de lo que queremos decir cuando decimos que algo "tiene simetría", por ejemplo al hablar de una flor, de un dibujo o de un edificio.

Para fijar ideas, pensemos en una figura en un papel, y al papel como el plano $\mathbb{R}^2$. La abstracción más elemental es que la figura es un subconjunto F de $\mathbb{R}^2$: los puntos del plano están en F (pintados de negro) o no (de blanco como el papel). Si nos ponemos quisquillosos, podríamos distinguir colores en los puntos (algo que hacen las computadoras hoy día) y tener entonces una función $\gamma : F \to \{Colores\}$ para ser más precisos. Pero quedémonos con el bulto, una *figura* F es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ (de una vez englobamos a los sólidos en $\mathbb{R}^3$). Una *simetría* de F (y hasta el termino "sí-metría" lo indica) es una transformación que preserva la métrica y la figura, es decir una $f \in \mathrm{Iso}(n)$ tal que $f(F) = F$ (donde estamos aplicando la transformación a un conjunto para obtener un nuevo conjunto). Podemos definir entonces al *grupo de simetrías* de la figura $F \subset \mathbb{R}^n$ como el conjunto

$$\mathrm{Sim}(F) := \{f \in \mathrm{Iso}(n) \mid f(F) = F\} \tag{3.3}$$

Debemos demostrar entonces que además de ser un conjunto de transformaciones de $\mathbb{R}^n$ cumple con las propiedades que lo hacen grupo; que estamos usando los términos con propiedad:

i) Claramente $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \in \mathrm{Sim}(F)$ pues $\mathrm{id}(F) = F$. De tal manera que cualquier figura tiene al menos la simetría trivial; y si la figura F no tiene otra simetría diríamos coloquialmente que **no** tiene simetrías, que es asimétrica.

ii) Supongamos que $f \in \mathrm{Sim}(F)$, entonces sustituyendo $F = f(F)$ obtenemos que

$$f^{-1}(F) = f^{-1}(f(F)) = \left(f^{-1} \circ f\right)(F) = \mathrm{id}(F) = F$$

donde estamos usando nuestra suposición de que $\mathrm{Iso}(n)$ es un grupo y entonces $f^{-1} \in \mathrm{Iso}(n)$ ya existe.

iii) Si $f, g \in \mathrm{Sim}\,(F)$ entonces usando que cada una no cambia a la figura se obtiene que

$$(f \circ g)\,(F) = f\,(g\,(F)) = f\,(F) = F$$

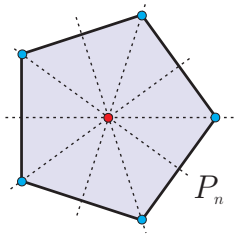
Que dice lo obvio, si un movimiento deja una figura en su lugar le podemos aplicar otro que la deja en su lugar y sigue en su lugar.

De tal manera que cualquier figura o cuerpo tiene asociado un grupo de isometrías; qué tan grande es ese grupo es nuestra medida intuitiva de "su simetría". Por ejemplo, el cuerpo humano (abstracto, por supuesto) tiene como simetría no trivial a una reflexión, que al ser su propia inversa forma, junto con la identidad, un grupo. Y ahora sí, podemos definir formalmente a los grupos que esbozamos (para $n \geq 5$, y definimos para $n = 3, 4$) en la primera Sección.

Grupos Diédricos.

Consideremos al polígono regular de n lados P_n, con $n \geq 2$, cuyos vértices son el conjunto

$$\{\mathbf{v}_{k,n} := (\cos\,(2\pi k/n)\,, \mathrm{sen}\,(2\pi k/n)) \mid k = 0, 1, \cdots, n-1\}$$



y que consiste de los segmentos entre puntos sucesivos $\overline{\mathbf{v}_{k,n}\mathbf{v}_{k+1,n}}$ llamados sus *caras*, *lados* o *aristas*; y si se quiere se puede pensar que también lo de adentro es parte de P_n. Definimos entonces al *grupo diédrico de orden* n como su grupo de simetrías:

$$\mathbf{D}_n := \mathrm{Sim}\,(P_n)$$

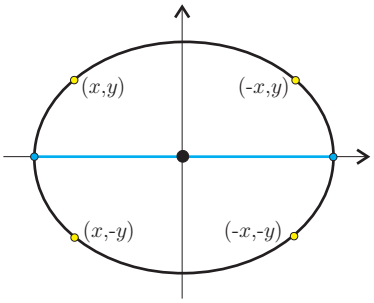
Es claro que $\mathbf{D}_n$ contiene a las n rotaciones en el origen $\rho_{2\pi k/n}$ que incluyen a la identidad ($k = 0$ o $k = n$). Pero además tiene reflexiones cuyos espejos son las lineas por el origen y los vertices y las lineas por el origen y el punto medio de sus lados (que para n impar ya estaban contados). En cualquier caso, son exactamente n reflexiones pues en nuestro conteo hubo repeticiones. De tal manera que $\mathbf{D}_n$ tiene $2n$ elementos.

Esta clase de simetría es la que tienen los rosetones de las iglesias (por lo que también se les conoce como "grupos de rosetas o bien de rosetones"); muchas de las figuras de papel picado que se obtienen doblando radialmente y luego cortando con tijeras; algunas plazas y edificios famosos y multiples flores asi como las estrellas de mar.

Más cercano al corazoncito de este libro, podemos considerar a las cónicas. Sea $\mathcal{E}$ la elipse dada por la ecuación canónica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $a > b$ (aunque lo que importa es que $a \neq b$). Es claro del dibujo que $\mathcal{E}$ tiene como simetrías a las reflexiones en los ejes. Pero lo podemos demostrar formalmente pues, como se debió haber respondido al ejercicio correspondiente, la reflexión en el eje-x está dada por la fórmula



$$\varphi_x(x,y) = (x,-y)$$

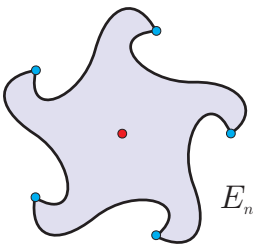
Y análogamente, la reflexión en el eje-y es $\varphi_y(x,y) = (-x,y)$, de tal manera que su composición (en cualquier orden) es la rotación de π en el origen ($(x,y) \mapsto (-x,-y)$). Si el punto (x,y) está en la elípse, satisface la ecuación y entonces los otros tres puntos que se obtienen al cambiarle el signo a una o las dos coordenadas también la satisfacen pues cambiar el signo no afecta a los cuadrados. Esto implica que $\mathcal{E}$ va en sí misma al reflejar en cualquiera de los ejes, que en adelante llamaremos sus *ejes de simetría*. Falta ver que no tiene ninguna otra simetría y esto se sigue de que su *diametro* (el segmento máximo entre sus puntos, que mide $2a$) es único. Y puesto que $\mathbf{D}_2$ es, por definición, el grupo de simetrías de un segmento, entonces

$$\mathrm{Sim}(\mathcal{E}) = \mathbf{D}_2$$

Analogamente, el grupo de simetrías de una hipérbola es el diédrico de orden 2. Las parábolas tienen menos simetrías, sólo una reflexión, que junto con la identidad forma un grupo que podemos llamar $\mathbf{D}_1$ para completar la definición de los diédricos (finitos). Nótese que este tipo de simetría (el de una sola reflexión, junto con la identidad) es muy común, el cuerpo humano (en abstracto, por supuesto), casi todos los animales, una silla, etc.

Grupos Cíclicos.

Son el subgrupo del diédrico correspondiente que consiste de tomar unicamente a las rotaciones. Pero lo importante es que también son grupos de simetría de figuras. Para obtener una, podemos reemplazar a las aristas del poligono P_n por curvas que distingan entre salida y llegada, por ejemplo, un símbolo de "integral" para obtener a la "Estrella Ninja de n picos" E_n. Y entonces el *grupo cíclico de orden* n es



$$\mathbf{C}_n := \mathrm{Sim}(E_n)$$

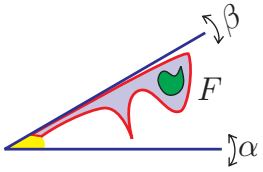
El grupo cíclico de orden n, $\mathbf{C}_n$, tiene n elementos. Se puede identificar con el grupo de residuos módulo n, denotado $\mathbb{Z}_n$, donde la composición corresponde a la suma.

Parece que el gran Leonardo Da Vinci notó que cualquier figura plana que se pueda dibujar en una hoja de papel (traducido a una figura $F \subset \mathbb{R}^2$ acotada) y que no tenga todas las simetrías de un circulo (que no sea un conjunto de anillos concéntricos), tiene como grupo de simetrías a alguno de estos dos tipos; es decir, o es diédrico o es cíclico. Una versión de este resultado la demostraremos hacía el final del capítulo, aunque desde ahora se puede entender su enunciado. Dice que si G es un grupo finito de Isometrías, es decir que como conjunto es finito, entonces es cíclico o es diédrico; que con estos dos ejemplos ya acabamos.

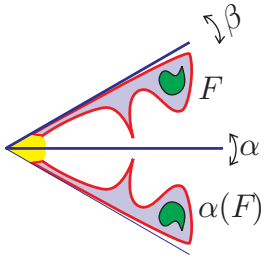
Sin embargo, hay otros grupos de simetría interesantes. Si pensamos en figuras no acotadas; por ejemplo, una cuadrícula o un mosaico (un cubrimiento del plano con copias de unas cuantas piezas), M digamos, entonces $\mathrm{Sim}\,(M)$ es lo que se llama un grupo cristalográfico. De estos solamente hay 17, pero no lo demostraremos en este libro.

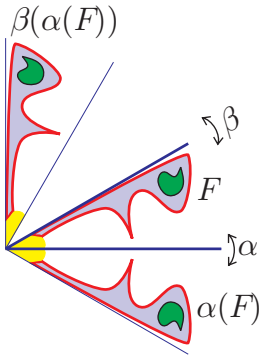
Diédrico y cíclico infinitos.

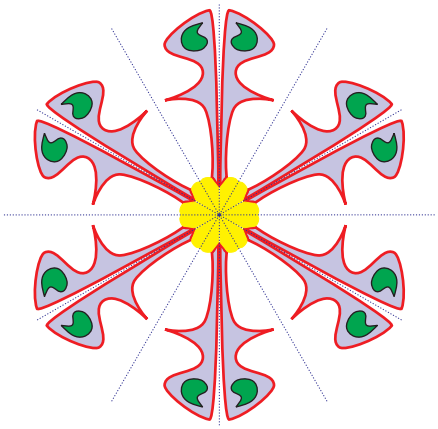
Para entender el porqué del nombre en sus versiones infinitas, vale la pena retomar la idea de generadores de un grupo usada en la primera sección. Para generar una figura con simetría diédrica (que quizá, como veremos, debía llamarse *caleidoscópica*) basta poner dos espejos en un ángulo π/n y colocarlos sobre cualquier dibujo; la porción de este que queda entre ellos se "reproduce" caleidoscópicamente y forma alrededor de la arista donde se juntan los espejos una figura con simetría $\mathbf{D}_n$.



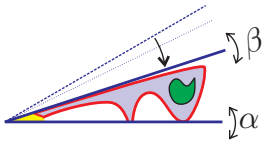
Consideremos esta situación en el plano del dibujo. Sean α y β las reflexiones en los dos espejos (que ahora son líneas en el plano y los de deveras son los planos que emanan perpendicularmente de ellas) y sea F la figura que queda en el ángulo relevante. La figura $\alpha\,(F)$ tiene la orientación contaria a F, es un reflejado de ella. Al volverla a reflejar en $\beta\,(\alpha\,(F))$ esta nueva copia de F ya tiene la orientación original y se obtiene rotando a F el doble del ángulo entre los espejos, a saber, $2\pi/n$ alrededor de su punto de intersección. Pero esto no se cumple sólo para la figura F: es una propiedad de las transformaciones, es decir, $\beta \circ \alpha$ es dicha rotación. La composición en el otro orden, $\alpha \circ \beta$, resulta ser la rotación inversa (de $-2\pi/n$ en el punto de intersección). Así, a cada copia o imagen de la figura F que se ve en el ángulo de espejos le corresponde un elemento del grupo diédrico que es justo la transformación que lleva a F ahí y que se obtiene componiendo sucesivamente a las dos reflexiones originales α y β. La figura con simetría diédrica o caleidoscópica que se genera es la unión de todas estas copias (justo $2n$) de lo que se podría llamar la *figura fundamental* que habíamos denotado F.





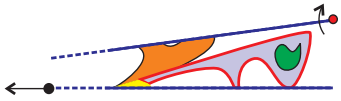


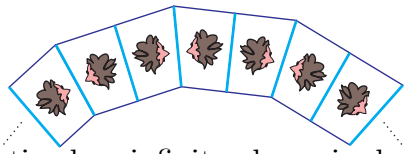
Hemos visto que, como en los casos $n = 3, 4$, los grupos diédricos estan generados por dos reflexiones; a saber, $\mathbf{D}_n$ está generado por dos reflexiones cuyos espejos se encuentran en un ángulo π/n (en las figuras tomamos $n = 6$). ¿Qué pasa si hacemos crecer n? Es claro que la figura fundamental F tenderá a hacerse más flaca y astillada, mientras que la figura caleidoscópica que generan (F y las reflexiones α y β), que podemos denotar $\mathbf{D}_n(F)$, pues resulta natural definir



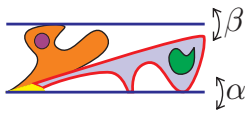
$$\mathbf{D}_n(F) := \bigcup_{g \in \mathbf{D}_n} g\,(F)\,,$$

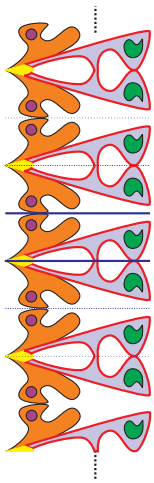
se hará más pesada y confusa, pues el ángulo π/n disminuye. Sin embargo, podemos evitar este tumulto si al mismo tiempo que n crece y π/n disminuye, alejamos al punto de intersección de los espejos; es decir, podemos girar a uno de los espejos (el correspondiente a β, digamos) alrededor de algún punto fijo y esto produce que el punto de intersección se aleje. La figura $\mathbf{D}_n(F)$ que se genera entonces es un anillo cuyo radio es grande: es como esos pasillos circulares que se generan en un baño o closet con espejos encontrados pero no perfectamente paralelos; aunque los espejos se acaben, los planos que definen se intersectan en una línea (imaginaria) que es el eje, el centro, del pasillo circular donde están nuestras imágenes viendo alternadamente en ambos sentidos y girando poco a poco.





Es claro que este proceso tiene un limite, cuando n tiende a infinito el espejo de β llega sin problemas a una paralela al espejo de α; y en ese momento generan al *grupo diédrico infinito* $\mathbf{D}_\infty$. Es el grupo que aparece en las peluquerías donde ponen espejos en paredes opuestas y, en teoría, paralelas. Cada elemento de este grupo es una composición (*palabra*) del estilo $\alpha\beta\alpha\beta\cdots\beta\alpha$, aunque puede empezar y terminar con cualesquiera de α o β. El subgrupo que consiste de palabras pares (incluyendo a la vacia que representa a la identidad) que son composición de un número par de reflexiones, es el *cíclico infinito*, $\mathbf{C}_\infty$: consta de puras translaciones y está generado por la más chica de ellas, $\alpha\beta$ o $\beta\alpha$ da lo mismo. De tal manera que naturalmente se identifica con los enteros ($\mathbb{Z}$) y la suma corresponde a la composición.





Pero el grupo diédrico infinito, como la figura con su simetría lo indica, realmente vive en la recta. Cualquier par de reflexiones distintas en $\mathbf{Iso}(1)$ lo generan. Y si lo definimos como subgrupo de isometrías de $\mathbb{R}^2$, fué porque gráficamente es más fácil de ver y para argumentar

la naturalidad de su pomposo nombre.

Nótese por último, que aunque al escoger distintas reflexiones para generar al diédrico infinito (o a cualquiera de los finitos, para este caso) se pueden obtener subconjuntos (estrictamente) distintos de isometrías, pero la estructura algebráica de ellos (cómo se comportan bajo composición) es escencialmente la misma. De tal manera que los grupos diédricos y cíclicos que hemos definido deben pensarse como algo abstracto que tiene muchas instancias de realización geométrica. Así que, estrictamente hablando, cuando decimos que el grupo generado por tal par de reflexiones es **el** diédrico fulano, realmente deberíamos decir "es **un** diédrico de zutanito orden".

EJERCICIO 3.33 Sean α y β las dos reflexiones de $\mathbb{R}$ con espejos en el 0 y en el 1 respectivamente, y sea (para este y los siguientes ejercicios) $\mathbf{D}_\infty \subset \mathbf{Iso}(1)$ el grupo de transformaciones que generan α y β. Da las fórmulas explicitas de α, β, $\alpha \circ \beta$, $\beta \circ \alpha$ y $\alpha \circ \beta \circ \alpha$.

EJERCICIO 3.34 ¿Cuál es el grupo $\mathbf{D}_\infty \cap \mathbf{Tra}(1)$? Da la fórmula explicita de todos sus elementos y su correspondiente expresión como generado por α y β. *(El proximo ejercicio te puede ayudar.)*

EJERCICIO 3.35 Demuestra que las reflexiones en $\mathbf{D}_\infty$ son precisamente las reflexiones con espejo entero. Es decir, cuyo espejo está en $\mathbb{Z} = \{... -2, -1, 0, 1, 2, ...\} \subset \mathbb{R}$.

EJERCICIO 3.36 ¿Cuáles son los generadores del grupo diédrico infinito cuyo subgrupo de translaciones corresponde precisamente a las translaciones por números enteros $\mathbb{Z}$.

3.3.3 Transformaciones ortogonales

Hemos definido isometrías, visto los ejemplos básicos y desarrollado la importante noción de simetría —y no sólo importante en las matemáticas sino en la naturaleza donde parece ser muy abundante—, pero tenemos aún muy pocas herramientas técnicas para demostrar cosas tan elementales como que $\mathbf{Iso}(n)$ es un grupo. Para esto serán fundamentales las transformaciones ortogonales. Pero su motivación más natural viene de recapitular en cómo introdujimos la noción de distancia: como una consecuencia natural del producto interior que era más elemental y fácil de trabajar; y a este lo hemos tenido olvidado. Si las isometrías se definieron como las funciones que preservan distancia, algo similar se debe poder hacer con el producto interior.

Definición 3.3.2 Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una *transformación ortogonal* si preserva al producto interior. Es decir, si para todo par $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se cumple

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y})$$

Se denota por $\mathbf{O}(n)$ al grupo de *transformaciónes ortogonales* de $\mathbb{R}^n$.

El lector observador debió haber notado que nos estamos adelantando al usar los términos "transformación" y "grupo" en la definición anterior. Estrictamente

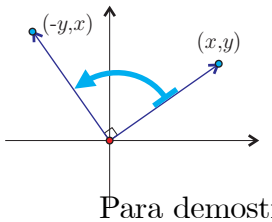
hablando, deberíamos usar los términos más modestos "función" y "conjunto", pero como sé (autor) que sí va a tener sentido, vale la pena irse acostumbrando; además, me suenan horrible los términos modestos en este caso, no me hallo usándolos. Por lo pronto, para limpiar un poco la conciencia, le dejamos al lector quisquilloso que cumpla los primeros trámites hacía la "liberación total" de los términos verdaderos.

EJERCICIO 3.37 Demuestra que la composición de funciones ortogonales es ortogonal.

EJERCICIO 3.38 Demuestra que si una función ortogonal tiene inversa entonces ésta también es ortogonal.

EJERCICIO 3.39 Demuestra que $\mathbf{O}(1) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, -\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\}$, donde $(-\mathrm{id}_{\mathbb{R}})(x) = -x$. Recuerda que el producto interior en $\mathbb{R}$ es el simple producto. Observa que entonces las transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}$ son sus isometrías que dejan fijo al origen.

Antes de entrar a las demostraciones, veamos un ejemplo que nos ha sido muy útil, el compadre ortogonal en $\mathbb{R}^2$. Hemos usado al compadre ortogonal de un vector dado, pero, como lo indicamos en el momento de su presentación, si pensamos en todas las asignaciones al mismo tiempo obtenemos una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, que podemos designar como $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y que está dada por la fórmula explicita



$$\rho(x, y) = (-y, x) \ .$$

Para demostrar que el compadre ortogonal es una transformación ortogonal (valga y explíquese la redundancia), hay que escribir la fórmula para $\rho(\mathbf{x}) \cdot \rho(\mathbf{y})$ con (conviene cambiar a subindices) $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ cualquier par de vectores:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) \cdot \rho(\mathbf{y}) &= (-x_2, x_1) \cdot (-y_2, y_1) \\ &= (-x_2)(-y_2) + x_1 y_1 \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \end{aligned}$$

(de hecho esto fué el inciso **(iii)** del Lema 1.7.1 que presentaba sus monerias en sociedad). Si el compadre ortogonal que, como función, consiste en girar 90° alrededor del orígen es ortogonal, es de esperarse que todas las rotaciones en el orígen también lo sean, y así será. Pero antes, relacionemos a las transformaciones ortogonales con las isometrías.

Puesto que la distancia se define en términos del producto interior, debe cumplirse que una función ortogonal también es isometría.

Lema 3.3.4 $\mathbf{O}(n) \subset \mathbf{Iso}(n)$

Demostración. Sea $f \in \mathbf{O}(n)$. Debemos demostrar que preserva distancias sabiendo que preserva producto interior. Pero esto es fácil pues la distancia se escribe en términos del producto interior. Dados $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^n$, la definición de distancia es

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}$$

Elevando al cuadrado y usando las propiedades del producto interior se tiene entonces

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y})^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \tag{3.4}$$

Como esto se cumple para cualquier par de puntos, en particular para $f(\mathbf{x})$ y $f(\mathbf{y})$, tenemos

$$\begin{aligned} d(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y}))^2 &= f(\mathbf{x})\cdot f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})\cdot f(\mathbf{y}) - 2f(\mathbf{x})\cdot f(\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \\ &= d(\mathbf{x},\mathbf{y})^2 \end{aligned}$$

donde usamos que $f \in \mathbf{O}(n)$ en la segunda igualdad. Puesto que las distancias son positivas, de aquí se sigue que

$$d(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

y por tanto que $f \in \mathbf{Iso}(n)$. □

EJERCICIO 3.40 Demuestra que las funciones ortogonales son inyectivas.

Ahora veremos que lo único que le falta a una isometría para ser ortogonal es respetar al orígen. Para que tenga sentido, hay que remarcar que una función ortogonal $f \in \mathbf{O}(n)$ preserva al orígen pues este es el único vector cuyo producto interior consigo mismo se anula, es decir, $f(\mathbf{0})\cdot f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\cdot\mathbf{0} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Lema 3.3.5 *Sea $f \in \mathbf{Iso}(n)$ tal que $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, entonces $f \in \mathbf{O}(n)$.*

Demostración. Con la misma idea del lema anterior, hay que escribir ahora al producto interior en términos de distancias. De la ecuación (3.4), se sigue

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} - d(\mathbf{x},\mathbf{y})^2)$$

Y como $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = d(\mathbf{x},\mathbf{0})^2$, tenemos entonces

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \frac{1}{2}(d(\mathbf{x},\mathbf{0})^2 + d(\mathbf{y},\mathbf{0})^2 - d(\mathbf{x},\mathbf{y})^2)$$

y ya estamos armados para enfrentar al lema.

Sea $f \in \mathbf{Iso}(n)$ (preserva distancias) tal que $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Por lo anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x})\cdot f(\mathbf{y}) &= \frac{1}{2}(d(f(\mathbf{x}),\mathbf{0})^2 + d(f(\mathbf{y}),\mathbf{0})^2 - d(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y}))^2) \\ &= \frac{1}{2}(d(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{0}))^2 + d(f(\mathbf{y}),f(\mathbf{0}))^2 - d(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y}))^2) \\ &= \frac{1}{2}(d(\mathbf{x},\mathbf{0})^2 + d(\mathbf{y},\mathbf{0})^2 - d(\mathbf{x},\mathbf{y})^2) \\ &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \end{aligned}$$

□

Estamos ya en posición de expresar a todas las isometrías en términos de las ortogonales y las translaciones.

Proposicion 3.3.1 *Sea $f \in \mathbf{Iso}(n)$. Entonces existen $g \in \mathbf{O}(n)$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ tales que para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$*

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$$

y además son únicas.

Dibujo

Demostración. Veamos primero la unicidad, es decir, que si suponemos que existen $g \in \mathbf{O}(n)$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ tales que f se escribe $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$, entonces g y $\mathbf{b}$ estan forzadas. Puesto que las transformaciones ortogonales dejan fijo al origen, obtenemos que

$$f(\mathbf{0}) = g(\mathbf{0}) + \mathbf{b} = \mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b}$$

y entonces la constante $\mathbf{b}$ está forzada a ser $\mathbf{b} := f(\mathbf{0})$. Pero entonces g ya queda definida por la ecuación

$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}$$

para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Nos falta entonces demostrar que con esta última definición de la función g y el vector constante $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que g es ortogonal.

Observése que otra manera de definir a g sería $g = \tau_{-\mathbf{b}} \circ f$, donde hay que recordar que $\tau_{-\mathbf{b}}$ es la translación por $-\mathbf{b}$. Por el Lema 3.3.2 (la composición de isometrías es isometría) y puesto que las translaciones son isometrías, se obtiene que $g \in \mathbf{Iso}(n)$. Pero además,

$$g(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) - \mathbf{b} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

entonces $g \in \mathbf{O}(n)$ por el lema anterior y la existencia queda demostrada. □

Tenemos entonces que las isometrías se obtienen de las transformaciones ortogonales al permitir que interactuen, que se involucren, que se compongan, con las translaciones (que **no** son ortogonales, de hecho sólo se intersectan en la identidad, $\mathbf{O}(n) \cap \mathbf{Tra}(n) = \{\mathrm{id}\}$, pues la única translación que deja fijo al origen es por $\mathbf{0}$). Corresponde esto al hecho de que la distancia se obtiene del producto interior transladando un punto al orígen. Y por tanto, para acabar de entender $\mathbf{Iso}(n)$ debemos estudiar $\mathbf{O}(n)$. Como en un ejercicio ya nos escabechamos a $\mathbf{O}(1) \simeq \{1, -1\}$, concentrémonos en $\mathbf{O}(2)$.

Sea $f \in \mathbf{O}(2)$. Como f preserva al producto interior, también preserva la norma y en particular manda al círculo unitario $\mathbb{S}^1$ en si mismo

$$\mathbf{x} \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1 \Rightarrow f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) = 1 \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in \mathbb{S}^1$$

Pero también preserva ortogonalidad (definida en base al producto interior). Entonces debe mandar bases ortonormales en bases ortonormales. Veámoslo con el ejemplo más
Dibujo simple.

Sean $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$; es decir $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ y $\mathbf{e}_2 = (0,1)$. Y sean

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &:= f(\mathbf{e}_1)\\ \mathbf{v} &:= f(\mathbf{e}_2)\end{aligned}$$

Afirmamos que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son una base ortonormal, pues de que $f \in \mathbf{O}(2)$ (preserva producto interior) se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} &= \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 = 1\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 = 1\\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = 0\end{aligned}$$

Y entonces podemos encontrar el valor de $f(\mathbf{x})$ para cualquier $\mathbf{x}$ usando el Teorema de las bases ortonormales (1.10.1) sobre $f(\mathbf{x})$

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}) &= (f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u})\mathbf{u} + (f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}\\ &= (f(\mathbf{x})\cdot f(\mathbf{e}_1))\mathbf{u} + (f(\mathbf{x})\cdot f(\mathbf{e}_2))\mathbf{v}\\ &= (\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{u} + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{v}\end{aligned}$$

que se puede escribir, tomando como de costumbre $\mathbf{x} = (x,y)$, como Dibujo

$$f(x,y) = x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v} \tag{3.5}$$

Hemos llegado entonces a una fórmula explícita para las funciones ortogonales (de $\mathbb{R}^2$) que depende unicamente de sus valores en la base canónica. Por ejemplo, si f fuera la función "compadre otogonal", entonces $\mathbf{u} = f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{v} = f(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1$ y por lo tanto $f(x,y) = x\,\mathbf{e}_2 - y\,\mathbf{e}_1 = (-y,x)$ como ya sabiamos. Podemos resumir con:

Proposicion 3.3.2 *Si $f \in \mathbf{O}(2)$, existe una base ortonormal $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^2$ para la cual f se escribe*

$$f(x,y) = x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v}$$

De aquí podemos sacar por el momento dos resultados: el primero, que estas funciones ortogonales son suprayectivas (y por lo tanto que ya les podemos decir "transformaciones" y a $\mathbf{O}(2)$ "grupo" con todas las de la ley); y el segundo, una descripción geométrica de todas ellas. Dibujo

Primero, con la notación de arriba, dado cualquier $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, es fácil encontrar $\mathbf{x}$ tal que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Sea $\mathbf{x} := (\mathbf{y}\cdot\mathbf{u})\mathbf{e}_1 + (\mathbf{y}\cdot\mathbf{v})\mathbf{e}_2$ entonces

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}) &= (\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{u} + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{v}\\ &= (\mathbf{y}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u} + (\mathbf{y}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{y}\end{aligned}$$

por el Teorema 1.10.1, y esto demuestra que f es sobre.

Segundo, cuántas transformaciones (¡ahora sí! sin pruritos) ortogonales de $\mathbb{R}^2$ hay es equivalente a cuántas bases ortonormales podemos escoger. El primer vector $\mathbf{u}$ (la imagen de $\mathbf{e}_1$, insistámos) puede ser cualquiera en el círculo unitario $\mathbb{S}^1$; pero una vez escogido ya nada más nos quedan dos posibilidades para escoger al segundo, pues éste debe ser perpendicular y unitario. Puede ser el compadre ortogonal ($\mathbf{v} = \mathbf{u}^\perp$) o bien su negativo ($\mathbf{v} = -\mathbf{u}^\perp$). En el primer caso, la transformación resulta ser una rotación que manda a la base canónica $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ en la base rotada $\mathbf{u}, \mathbf{u}^\perp$. Y en el segundo caso veremos que es una reflexión. Podríamos decir entonces que $\mathbf{O}(2)$ "consiste de dos copias" de $\mathbb{S}^1$ parametrizadas por $\mathbf{u}$, una corresponde a las rotaciones (cuando se escoje $\mathbf{v} = \mathbf{u}^\perp$) y la otra a las reflexiones.

Pero para que todo esto sea un hecho nos falta demostrar que sin importar que base ortonormal tomemos, siempre se obtiene una transformación ortogonal.

Proposicion 3.3.3 *Sea $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Entonces la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por*

$$f(x, y) = x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v}$$

es una transformación ortogonal.

Demostración. Sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ cualquier par de puntos en $\mathbb{R}^2$. Entonces

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) &= (x_1\,\mathbf{u} + x_2\,\mathbf{v}) \cdot (y_1\,\mathbf{u} + y_2\,\mathbf{v}) \\ &= (x_1 y_1)\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + (x_2 y_2)\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \end{aligned}$$

□

EJERCICIO 3.41 Demuestra que las isometrías de $\mathbb{R}^2$ son suprayectivas, para concluir con la demostración de que $\mathbf{Iso}(2)$ es un grupo de transformaciones.

EJERCICIO 3.42 Demuestra que las funciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$ son suprayectivas y concluye las demostraciones de que $\mathbf{O}(3)$ e $\mathbf{Iso}(3)$ son grupos de transformaciones.

EJERCICIO 3.43 Sea $f \in \mathbf{O}(2)$ con base ortonormal asociada $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ (es decir, con $\mathbf{u} = f(\mathbf{e}_1)$ y $\mathbf{v} = f(\mathbf{e}_2)$). Con nuestra demostración de la suprayectividad de f se puede encontrar a la base ortonormal asociada a la inversa de f, llamémosla $\mathbf{u}', \mathbf{v}'$. Da sus coordenadas explicitas tomando $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$.

EJERCICIO 3.44 Sean $f \in \mathbf{O}(2)$ y ℓ una recta dada por la ecuación $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c$. Demuestra que $f(\ell)$ es la recta dada por la ecuación $f(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{x} = c$ (ojo: tienes que demostrar dos contenciones). Concluye que f manda al haz paralelo con dirección $\mathbf{d}$ en el haz paralelo con dirección $f(\mathbf{d})$.

Un ejemplo

Para fijar ideas, concluyamos esta sección con un ejemplo que nos ayude a comprender el poder de los resultados obtenidos. Dibujo

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de 45° (o $\pi/4$) alrededor del punto $\mathbf{p} = (3, 2)$; el problema es escribir una fórmula explicita para f. Es decir, supongamos que le queremos dar la función a una computadora para que haga algo con ella, que se la sepa aplicar a puntos concretos, no le podemos dar la descripción que acabamos de hacer (y que cualquier humano entiende) para definir f, sino que tiene que ser mucho más concreta: una fórmula analítica.

Por la Proposición 3.3.1, sabemos que f se escribe como

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$$

para alguna $g \in \mathbf{O}(2)$ y alguna $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. El problema se divide entonces en dos: cómo se escribe g y quién es $\mathbf{b}$. Primero, g debe ser la rotación de $\pi/4$ en el origen pues f cambia a las líneas horizontales en líneas a 45° y en la expresión anterior sólo g puede hacer esta gracia (pues una vez que apliquemos g la translación mantendrá la orientación de las líneas). Por la Proposición 3.3.2, para expresar a g basta ver que le hace a la base canónica $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ y sabemos que tiene que ir a $\mathbf{u}, \mathbf{u}^\perp$ donde $\mathbf{u}$ es el vector unitario a 45°. Es decir, sea

$$\mathbf{u} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

y entonces por (3.5) g se escribe

$$\begin{aligned} g(x, y) &= x\mathbf{u} + y\mathbf{u}^\perp \\ &= x(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) + y(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y, x + y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y, x + y) \end{aligned}$$

y esto sí que lo entiende una computadora. Para convencernos de que ahí la llevamos basta checar que efectivamente esta fórmula da $g(\mathbf{e}_1) = \mathbf{u}$ y $g(\mathbf{e}_2) = \mathbf{u}^\perp$; e inclusive que $g(\mathbf{u}) = \mathbf{e}_2$ como dice la geometría.

El segundo problema es encontrar $\mathbf{b}$. Sabemos por la demostración de la Proposición 3.3.1 que $\mathbf{b} = f(\mathbf{0})$. Y entonces bastará encontrar este valor particular. Esto se puede razonar de varias maneras, pero lo haremos de manera muy general. Recordemos que definimos rotar en el punto $\mathbf{c}$ como transladar $\mathbf{c}$ al origen, rotar ahí y luego regresar a $\mathbf{c}$ a su lugar. En términos de funciones esto se escribe

$$f = \tau_{\mathbf{c}} \circ g \circ \tau_{-\mathbf{c}}$$

donde $\tau_{\mathbf{x}}$ es la translación por $\mathbf{x}$. De aquí, se podría sacar directamente la fórmula para f pues ya sabemos expresar a g y a las translaciones, y falta nadamas la talacha; o bien, podemos sólo aplicarselo al $\mathbf{0}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= f(\mathbf{0}) = (\tau_{\mathbf{c}} \circ g \circ \tau_{-\mathbf{c}})(\mathbf{0}) \\ &= (\tau_{\mathbf{c}} \circ g)(\mathbf{0} - \mathbf{c}) = \tau_{\mathbf{c}}(g(-\mathbf{c})) = g(-\mathbf{c}) + \mathbf{c} \\ &= g(-3,-2) + (3,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-5) + (3,2) \\ &= (3 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 - \frac{5}{\sqrt{2}}).\end{aligned}$$

De donde concluimos que la expresión analítica de f es

$$\begin{aligned}f(x,y) &= g(x,y) + f(\mathbf{0}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y, x+y) + (3 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 - 5\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - y - 1 + 3\sqrt{2}\,,\; x + y - 5 + 2\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

EJERCICIO 3.45 Encuentra la expresión analítica de las siguientes isometrías:
a) La reflexión en la recta $\ell : x + y = 1$.
b) La rotación de $\pi/2$ en el punto $(-2, 3)$.
c) La rotación de π en el punto $(4, 3)$.
d) La reflexión en la recta $\ell : y = 1$ seguida de la translación por $(2, 0)$.

EJERCICIO 3.46 Describe geométricamente (con palabras) las siguientes isometrías:
a) $f(x, y) = (x + 1, -y)$
b) $f(x, y) = (-x + 2, -y)$
c) $f(x, y) = (-y, -x + 2)$

3.4 Las funciones lineales

Hemos visto que las transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^2$ quedan determinadas por lo que le hacen a la base canónica; es decir, que se escriben

$$f(x, y) = x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v}$$

donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores fijos ($\mathbf{u} = f(\mathbf{e}_1)$ y $\mathbf{v} = f(\mathbf{e}_2)$, bien por definición o bien por la fórmula); y además, vimos que si la función es ortogonal entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ forman una base ortonormal. Pero si en esta fórmula no le pedimos nada a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$, simplemente que sean vectores cualesquiera en $\mathbb{R}^2$, obtenemos una familia de funciones mucho más grande: las *funciones lineales* de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ (ver el siguiente teorema). Estas funciones son la base del Algebra Lineal y serán el fundamento para las transformaciones que más nos interesan, así que vale la pena definirlas y estudiarlas un rato en general.

Definición 3.4.1 Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es *lineal* si para todos los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y todo número $t \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\begin{array}{rl} \mathbf{i}).- & f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \\ \mathbf{ii}).- & f(t\,\mathbf{x}) = t\, f(\,\mathbf{x}) \end{array}$$

Estas funciones, al preservar la suma y la multiplicación por escalares, preservan las operaciones básicas de un espacio vectorial y por eso son tan importantes. Pero en el caso que nos ocupa, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.4.1 *Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es lineal, si y sólo si se escribe*

$$f(x, y) = x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v}$$

donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores fijos en $\mathbb{R}^2$.

Demostración. Supongamos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es lineal y sean $\mathbf{u} := f(\mathbf{e}_1)$ y $\mathbf{v} := f(\mathbf{e}_2)$, donde, recuérdese, $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ y $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ son la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Dado cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, tenemos que si $\mathbf{x} = (x, y)$ entonces $\mathbf{x} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2$, de donde, usando las propiedades (**i**) y (**ii**) respectivamente, se obtiene

$$\begin{aligned} f\,(x, y) &= f(\mathbf{x}) = f(x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2) \\ &= f(x\,\mathbf{e}_1) + f(y\,\mathbf{e}_2) \\ &= x\, f(\mathbf{e}_1) + y\, f(\mathbf{e}_2) \\ &= x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Lo cual demuestra que cualquier función lineal se expresa en la forma deseada.

Por el otro lado, veámos que la función $f(x, y) = x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v}$, con $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ arbitrarios, es lineal. Cambiando la notación de las coordenadas, sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. De la definición de f y las propiedades elementales de la suma vectorial tenemos

$$\begin{aligned} f\,(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= f\,(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= (x_1 + y_1)\ \mathbf{u} + (x_2 + y_2)\ \mathbf{v} \\ &= (x_1\,\mathbf{u} + x_2\,\mathbf{v}) + (y_1\,\mathbf{u} + y_2\,\mathbf{v}) \\ &= f\,(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})\,, \end{aligned}$$

lo cual demuestra que f cumple (**i**). Análogamente, f cumple (**ii**) pues para cualquier $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(t\,\mathbf{x}) &= (tx_1)\,\mathbf{u} + (tx_2)\,\mathbf{v} \\ &= t\ (x_1\,\mathbf{u} + x_2\,\mathbf{v}) = t(\ f(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Lo cual concluye la demostración del Teorema. □

Tenemos entonces que las transformaciones ortogonales son funciónes lineales, así que ya hemos visto varios ejemplos. Pero son mucho más las lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que las ortogonales (ver Ejercicio 3.4). Si tomamos la *cuadrícula canónica* con vérticales y horizontales en los enteros de los ejes, una transformación lineal la manda en la "rombícula" que generan los vectores las imágenes de la base canónica y que consiste en tomar las paralelas a uno de ellos que pasan por los múltiplos enteros del otro. Sólo cuando esta rombícula se sigue viendo como cuadrícula, y del mismo tamaño, tenemos una transformación ortogonal. Pero además, nótese que hemos definido funciones lineales entre diferentes espacios vectoriales y que en la demostración del Teorema no tuvimos que explicitar en dónde viven $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Si vivieran en $\mathbb{R}^3$, por ejemplo, la imagen sería la misma, un plano rombiculado, que tiene la libertad extra de bambolearse.

Animacion Interactiva

EJERCICIO 3.47 Demuestra que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal preserva al origen, es decir, que cumple $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

EJERCICIO 3.48 Demuestra que una función lineal manda lineas en lineas (de ahí su nombre) o a veces en puntos.

EJERCICIO 3.49 Demuestra que la composición de funciones lineales es lineal.

EJERCICIO 3.50 Demuestra que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $f(x, y) = x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v}$ es ortogonal si y sólo si $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ forman una base ortonormal.

EJERCICIO 3.51 Demuestra que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 3x$ es una función lineal.

EJERCICIO 3.52 Demuestra que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es lineal si y sólo si es la función $f(x) = a\,x$ para alguna $a \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 3.53 Demuestra que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida como $f(x) = (3x, 5x)$ es una función lineal.

EJERCICIO 3.54 Demuestra que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es lineal si y solo si se escribe $f(x) = (ax, bx)$, para algunos $a, b \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 3.55 Demuestra que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f\,(x, y) = 2x + 4y$ es una función lineal.

EJERCICIO 3.56 Demuestra que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $f(x, y) = (x + y, y - x)$ es una función lineal.

EJERCICIO 3.57 Exhibe una función lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que mande al eje x en la recta $\ell : 2x - y = 0$.

EJERCICIO 3.58 Demuestra que una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^n$ es lineal, si y sólo si se escribe

$$f(x, y, z) = x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v} + z\,\mathbf{w}$$

donde $\mathbf{u} = f(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{v} = f(\mathbf{e}_2)$ y $\mathbf{w} = f(\mathbf{e}_3)$.

3.4.1 Extensión lineal

De los ejercicios anteriores, en particular el último, debe quedar claro que el Teorema 3.4.1 es sólo un caso particular de un resultado general que haremos explicito en este apartado. Aunque estemos particularmente interesados en las dimensiones $1, 2, 3$, para lidear con todas ellas a la vez, y evitarse el molesto trabajo de 6, seis, casos particulares, es necesario trabajar con los abstractos $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$.

Como definimos en el Capítulo 1, dados vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ en $\mathbb{R}^n$, una *combinación lineal* de ellos es el vector

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$$

donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., k$, son escalares cualesquiera llamados los *coeficientes* de la combinación lineal. Por ejemplo, todas las combinaciones lineales de un solo vector ($k = 1$) forman la recta que genera (si es no nulo) y las de dos vectores forman un plano (si no son paralelos). En una combinación lineal se están utilizando simultaneamente las dos operaciones básicas de un espacio vectorial. Ahora bien, si tenemos una función lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, se cumple que *preserva combinaciones lineales* pues

$$f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(\mathbf{v}_i),$$

donde se usa la propiedad **(i)** de las funciones lineales en la primera igualdad y la **(ii)** en la segunda. Así que podemos redefinir función lineal como aquella que cumple

$$f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(\mathbf{v}_i), \tag{3.6}$$

para cualesquier $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$; pues esta condición claramente incluye a la **(i)** y la **(ii)** de la definición original. Hay que hacer énfasis en que en esta igualdad la combinación lineal de la derecha se da en $\mathbb{R}^m$ (el codominio), mientras que la que tenemos en el lado izquierdo ocurre en $\mathbb{R}^n$ (el dominio), antes de aplicarle la función, que no necesariamente son el mismo espacio.

Por otro lado, $\mathbb{R}^n$ tiene una *base canónica*: los vectores $\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, ..., 0), ..., \mathbf{e}_n = (0, 0, ..., 1)$; es decir, para $i = 1, ..., n$ el vector $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ tiene i-ésima coordenada 1 y el resto 0. Que se llaman canónicos pues la combinación lineal de ellos que nos da a cualquier otro vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ se obtiene trivialmente ("canónicamente") de sus coordenadas:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i .$$

De tal manera que para cualquier función lineal f que sale de $\mathbb{R}^n$ se tiene, usando (3.6) y esta última expresión, que

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\mathbf{e}_i) .$$

Nos falta ver que los valores que puede tomar f en la base canónica son arbitrarios. Es decir, si tomamos n vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^m$ arbitrariamente, y queremos encontrar una función lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que cumpla $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{u}_i$ para $i = 1, 2, ..., n$, entonces debemos definirla en todo $\mathbb{R}^n$ como

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \mathbf{u}_i \ .$$

A esta función se le llama la *extensión lineal* a $\mathbb{R}^n$ de lo que determinamos para la base canónica. Pero nos falta demostrar que efectivamente es lineal. Sin embargo, esto es muy fácil de hacer usando la definición original de función lineal y las de suma y multiplicación por escalares; hay que copiar la del Teorema 3.4.1 con más coordenadas, y le dejamos esa chamba al lector. Podemos resumir entonces con el siguiente Teorema .

Teorema 3.4.2 *Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es lineal si y sólo si se escribe*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 \, \mathbf{u}_1 + x_2 \, \mathbf{u}_2 + \cdots + x_n \, \mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \mathbf{u}_i \ ,$$

donde $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^m$. Nótese que $\mathbf{u}_i = f(\mathbf{e}_i)$. □

Corolario 3.4.1 *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son dos funciones lineales tales que $f(\mathbf{e}_i) = g(\mathbf{e}_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Por el Teorema, tienen la misma expresión. □

El Teorema, o bien su Corolario, pueden llamarse "Teorema de extensión única de funciones lineales". La moraleja es que una función lineal depende unicamente de unos cuantos valores: los que le asigna a la base canónica, y estos, una vez fijado el codominio, son arbitrarios.

EJERCICIO 3.59 Describe el lugar geométrico definido como $\mathcal{L} = \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}\}$, donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es una función lineal.

EJERCICIO 3.60 Describe el lugar geométrico definido como $\Pi = \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}$, donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una función lineal.

EJERCICIO 3.61 ¿Qué ejercicios del bloque anterior se siguen inmediatamente del Teorema 3.4.2? Reescribelos.

3.4.2 La estructura de las funciones lineales

En el Capítulo 1 dejamos al aire un ejercicio donde se le pregunta al lector si conoce algún otro espacio vectorial que no sea $\mathbb{R}^n$. Sería desleal dejar pasar ese ejemplo cuando lo tenemos en las narices. Efectivamente, cuando fijamos el dominio y el contradominio, las funciones lineales entre ellos tienen naturalmente la estructura de espacio vectorial.

Fijemos notación. Sea $\mathcal{L}(n,m)$ el conjunto de todas las funciones lineales de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, es decir

$$\mathcal{L}(n,m) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \mid f \text{ es lineal}\}.$$

Como en el codominio se tienen las operaciones de suma y multiplicación por escalares, estas operaciones se pueden definir también en las funciones; en cierta manera, las funciones las heredan. Dadas $f, g \in \mathcal{L}(n,m)$ y $t \in \mathbb{R}$, sean

$$\begin{aligned} f+g &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ (f+g)(\mathbf{x}) &:= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} t\,f &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ (t\,f)(\mathbf{x}) &:= t(f(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

Hay que demostrar que estas nuevas funciones también son lineales. Y esto es muy fácil de la definición original, pues dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (f+g)(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}) &= f(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}) + g(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}) \\ &= \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y}) + \lambda g(\mathbf{x}) + \mu g(\mathbf{y}) \\ &= \lambda(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) + \mu(f(\mathbf{y}) + g(\mathbf{y})) \\ &= \lambda(f+g)(\mathbf{x}) + \mu(f+g)(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Formalmente nos falta demostrar que estas operaciones cumplen todas las propiedades que se les exigen a los espacios vectoriales (el Teorema **??**). Esto depende escencialmente de que $\mathbb{R}^m$ es espacio vectorial (no de que sean funciones lineales) y dejamos los detalles como ejercicio lateral (no escencial) a la línea del texto. Los nuevos ejemplos de espacio vectorial son entonces los conjuntos de funciones que salen de algún lugar (con alguna propiedad —el caso que dasarrollamos fué que son lineales—) pero que **caen** en un espacio vectorial (en nuestro caso, $\mathbb{R}^m$).

EJERCICIO 3.62 Sea V un espacio vectorial y sea X cualquier conjunto. Demuestra que el conjunto de todas las funciones de X en V, $\mathcal{F}(X,V)$, tiene una estructura natural de espacio vectorial. (En particular $\mathcal{L}(n,m)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ que es inmensamente más grande).

EJERCICIO 3.63 Sea $\Delta_n = \{1, 2, ..., n\}$ el conjunto finito "canónico" con n elementos. Como corolario del Teorema 3.4.2, demuestra que los espacios vectoriales $\mathcal{L}(n, m)$ y $\mathcal{F}(\Delta_n, \mathbb{R}^m)$ se pueden identificar naturalmente.

3.5 Matrices

Las matrices son arreglos rectangulares de números, tablas podría decirse, donde los renglones y las columnas no tienen ningun significado extra, como podrían tener, por ejemplo, en la tabla de calificaciones parciales de alumnos en un curso. Así de simple, las matrices son tablas limpias, abstractas. En nuestro contexto actual, habrán de ser los "paquetes" que cargan toda la información de las funciones lineales y nos darán la herramienta para hacer cálculos respecto a ellas, además de simplificar la notación.

En matemáticas, la notación es importante. Una notación clara y sencilla permite ver la escencia de las cosas, de las ideas y de los problemas. Por el contrario, con una notación complicada o confusa es fácil perderse en la labor de desentrañarla y nunca llegar a las ideas profundas; piénsese, por ejemplo, en diseñar un algoritmo para multiplicar con números romanos. Viene esto al caso, pues esta sección trata basicamente de cómo simplificar la notación para lograr manejar las transformaciones geométricas muy en concreto. Encontraremos la mecánica y la técnica para hacer cálculos con facilidad. Para empezar, cambiaremos nuestra notación de vectores.

3.5.1 Vectores columna

Como crítica a la notación que traemos, escribamos una función lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ explicitamente. Digamos que $f(\mathbf{e}_1) = (1, 2, 3)$, $f(\mathbf{e}_2) = (6, 5, 4)$ y $f(\mathbf{e}_3) = (2, 3, 1)$, entonces sabemos que f se escribe

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x(1, 2, 3) + y(6, 5, 4) + z(2, 3, 1) \\ &= (x + 6y + 2z, 2x + 5y + z, 3x + 4y + z). \end{aligned}$$

Para hacer este cálculo, la vista tuvo que andar brincoteando en una linea, buscando y contando comas; es muy fácil equivocarse. Es más, ¿dónde está el error? Sin embargo, sabemos que el cálculo es sencillísimo, mecánico. Si en lugar de tomar a los vectores como renglones los tomamos como columnas, la misma talachita se hace evidente a la vista

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 6y + 2z \\ 2x + 5y + 3z \\ 3x + 4y + z \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

y eliminamos las comas (y corregimos el error). Ahora cada renglon se refiere a una coordenada, y se ve todo de golpe; mucho mejor notación que haremos oficial.

Notación 3.1 De ahora en adelante, los vectores en $\mathbb{R}^n$ se escribiran como columnas y no como renglones. Es decir, si antes escribiamos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ahora escribiremos

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

El inconveniente de que entonces se complica escribir un vector dentro del texto (aquí, por ejemplo), lo subsanamos al llamar a los vectores renglón, *transpuestos* de los vectores columna, y los denotaremos $\mathbf{x}^\top = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; aunque a veces se nos va a olvidar poner el exponente $\top$ de "transpuesto", y el lector nos lo perdonará, y con el tiempo nos lo agradecerá.

Así, por ejemplo, tenemos que la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es $\mathbf{e}_1^\top = (1, 0)$ y $\mathbf{e}_2^\top = (0, 1)$ que quiere decir

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vale la pena insistir en que no hay ningún cambio escencial. Sólo cambiamos de convención, una pareja ordenada de números se puede pensar horizontal (de izquierda a derecha) o vertical (de arriba a abajo); estamos conviniendo en que lo haremos y escribiremos vertical.

3.5.2 La matriz de una función lineal

Una matriz de $m \times n$ es un arreglo rectangular (o tabla) de números reales con m renglones y n columnas. Si, usando dos subindices, denotamos por a_{ij} al númerito que está en el renglon i y la columna j, llamado *entrada*, tenemos que una matriz de $m \times n$ es

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Podríamos también definirla como un conjunto ordenado de n vectores en $\mathbb{R}^m$: sus columnas. Es decir, la matriz A anterior se puede escribir como

$$A = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) \quad \text{donde} \quad \mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

De tal manera que, de acuerdo al Teorema 3.4.2, una matriz $m \times n$ tiene justo la información de una función lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ (ojo: se invierte el orden por la lata de que las funciones se componen "hacia atras"). Explicitamente, a la matriz A se le asocia la función lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que manda al vector canónico $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ en su columna i-ésima, es decir, tal que $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{u}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. O bien, inversamente, a cada función lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se le asocia la matriz $m \times n$ que tiene como columnas a sus valores en la base canónica, es decir, se le asocia la matriz

$$A = (f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \ldots, f(\mathbf{e}_n)) .$$

Por ejemplo, a la función lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ definida en (3.7) se le asocia la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

que es ya una compactación considerable en la notación; a la transformación "compadre ortogonal" de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ se le asocia la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y a la función lineal que a cada vector en $\mathbb{R}^3$ lo manda a su segunda coordenada (en $\mathbb{R}$) se le asocia la matriz 1×3: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 1, 0)$.

Ya logramos nuestro primer objetivo, empaquetar en una matriz toda la información de una función lineal. Ahora usémosla como herramienta. Primero, definiremos el producto de una matriz por un vector para que el resultado sea lo que su función lineal asociada hace al vector. Es decir, si A es una matriz $m \times n$, podrá multiplicar sólo a vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y el resultado será un vector en $\mathbb{R}^m$. Como ya vimos, A se puede escribir $A = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ donde $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^m$, para $i = 1, 2, \ldots, n$; y por su parte, sea $\mathbf{x}^\top = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Definimos entonces el *producto* de A por $\mathbf{x}$ como

$$A\mathbf{x} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n \tag{3.8}$$

de tal manera que el Teorema 3.4.2 junto con su Corolario y lo que hemos visto de matrices se puede resumir en el siguiente Teorema.

Teorema 3.5.1 *Las funciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ están en correspondencia natural y biunivoca con las matrices de $m \times n$, de tal manera que a la función f le corresponde la matriz A que cumple*

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Obsérvese que cuando $m = 1$ el producto que acabamos de definir corresponde a nuestro viejo conocido el producto interior. Es decir, si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\mathbf{y}^\top \mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \ .$$

De tal manera que si escribimos a A como una columna de renglones, en vez de un renglón de columnas que es lo que hemos hecho, entonces hay vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ (los renglones) tales que

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^\top \\ \mathbf{v}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m^\top \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{x} \end{pmatrix} \ .$$

Esta definición del producto de una matriz por un vector es, aunque equivalente, mas "desagradable" que la anterior, pues los vectores $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$ no tienen ningun significado geométrico; son simplemente la colección ordenada de las i-ésimas coordenadas de los vectores $\mathbf{u}_j \in \mathbb{R}^m$. Aunque somos injustos, sí tienen un significado, los renglones $\mathbf{v}_i^\top$ son las matrices asociadas a las m funciones lineales $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que dan las coordenadas de la función original.

Para fijar ideas, y no perdernos en las abstracciones, terminamos esta sección con la expresión explicita del caso que más nos interesa en este libro: la multiplicación de una mátriz de 2×2 por un vector en $\mathbb{R}^2$, que tiene la fórmula general

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

donde todos los protagonistas son simples numeritos.

EJERCICIO 3.64 Encuentra las matrices asociadas a las funciones lineales de algunos de los ejercicios anteriores.

EJERCICIO 3.65 Un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ se puede pensar como matriz $n \times 1$. Como tal, ¿a qué función lineal representa según el Teorema 3.5.1?

EJERCICIO 3.66 El conjunto de todas las funciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, que denotamos $\mathcal{L}(n, m)$ en la Sección 3.4.2, tienen la estructura de espacio vectorial y el Teorema 3.5.1 dice que esta en biyección natural con las matrices $m \times n$. Si definimos la suma de matrices y la multiplicación de escalares por matrices correspondiendo a las operaciones análogas en $\mathcal{L}(n, m)$, demuestra que $A + B$ (que tiene sentido solo cuando A y B son del mismo tipo $m \times n$) es sumar entrada por entrada, y que tA es multiplicar a todas las entradas por t. ¿Puedes dar una demostración fácil de que $\mathcal{L}(n, m)$ es un espacio vectorial? (Observa, del ejercicio anterior, que $\mathcal{L}(1, n)$ se identifica naturalmente con $\mathbb{R}^n$.)

3.5.3 Multiplicación de matrices

Vamos ahora a definir la multiplicación de matrices correspondiendo a la composición de funciones lineales. Tiene sentido componer dos funciones sólo cuando una "acaba" donde la otra "empieza"; más formalmente, cuando el codominio de una coincide con el dominio de la otra. De igual forma, sólo tendra sentido multiplicar las matrices cuyas dimensiones se "acoplen". Veámos.

Dibujo

Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ dos funciones lineales. Por el ejercicio 3.4, $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ también es lineal. Sean A la matriz $m \times n$ y B la matriz $k \times m$ que corresponden a f y a g respectivamente. *Definimos el producto* BA como la matriz $k \times n$ que corresponde a la función lineal $g \circ f$. Es decir, BA es la única matriz $k \times n$ que cumple

$$(g \circ f)(\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x} \quad \text{para todo} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ .$$

Aunque esta definición ya es precisa según el Teorema 3.5.1, todavía no nos dice cómo multiplicar. Esto habrá que deducirlo. Recordemos que las columnas de una matriz son las imágenes de la base canónica bajo la función asociada. Así que si $A = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ donde $\mathbf{u}_i = f(\mathbf{e}_i) \in \mathbb{R}^m$, entonces $(g \circ f)(\mathbf{e}_i) = g(f(\mathbf{e}_i)) = g(\mathbf{u}_i) = B\mathbf{u}_i$. Y por lo tanto

$$BA = B\left(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\right) = \left(B\mathbf{u}_1, B\mathbf{u}_2, \dots, B\mathbf{u}_n\right).$$

Lo cual es muy natural: para obtener las columnas de la nueva matriz, se usa la multiplicación de B por los vectores columna de A, multiplicación que ya definimos. Para expresar cada una de las entradas de la matriz BA, habrá que expresar a B como una columna de vectores renglon, y se obtiene

$$BA = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1^\top \\ \mathbf{w}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{w}_k^\top \end{pmatrix} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{u}_n \\ \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{u}_n \end{pmatrix} , \qquad (3.9)$$

donde es claro porqué los renglones de B (los transpuestos de los vectores $\mathbf{w}_i$) y las columnas de A (los vectores $\mathbf{u}_j$) tienen que estar en el mismo espacio ($\mathbb{R}^m$); y cuál es la mecánica (véase abajo "la ley del karatazo") para obtener las entradas de una matriz $k \times n$ (BA) a partir de una $k \times m$ (B) y una $m \times n$ (A). Esta fórmula da, en el caso de matrices 2×2, lo siguiente

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

"La multiplicación de matrices corresponde a la *ley del karatazo*: un karateca en guardia pone su antebrazo derecho vertical y el izquierdo horizontal —¡(*huuouui*)!—

y se apresta a multiplicar dos matrices: recoge con la mano derecha una columna de la matriz derecha y —¡$(aaah_1, aah_2, \cdots, ah_k)$!— le va pegando karatazos a los renglones de la izquierda para ir obteniendo la columna correspondiente en el producto; o bien, si es más ducho con la chueca, recoge con la zurda renglones de la izquierda y —¡$(uuuf_1, uuf_2, \cdots, uf_n)$!— golpea a las columnas derechas para ir sacando, de una en una, las entradas del producto."

EJERCICIO 3.67 Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcula AB, $A(B+C)$, $(C-B)A$.

EJERCICIO 3.68 Exhibe matrices A y B de 2×2 tales que $AB \neq BA$. De tal manera que el producto de matrices no es conmutativo.

EJERCICIO 3.69 Exhibe matrices A y B de 2×2 tales que $AB = \mathbf{0}$, pero $A \neq \mathbf{0}$ y $B \neq \mathbf{0}$; donde $\mathbf{0}$ es la matriz cero (con todas sus entradas 0). *(Piensa en términos de funciones.)*

EJERCICIO 3.70 Demuestra que si A, B, C son matrices 2×2 entonces $A(BC) = (AB)C$, es decir, que el producto de matrices es asociativo, y por lo tanto tiene sentido escribir ABC. *(No necesariamente tienes que escribir todo el producto y capaz que tu demostración vale en general.)*

EJERCICIO 3.71 Demuestra que si A, B, C son matrices 2×2 entonces $A(B+C) = AB+AC$ y $(A+B)C = AC+BC$.

EJERCICIO 3.72 Demuestra que si A, B son matrices 2×2 entonces $A(kB) = (kA)B = k(AB)$ para cualquier $k \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 3.73 Usando el Teorema 3.4.2 demuestra que si A, B, C son matrices $n \times n$ entonces $A(BC) = (AB)C$.

3.5.4 Algunas familias distinguidas de matrices

La matriz Identidad

Aunque no sea una familia propiamente dicho, se merece su parrafo aparte, y ser el primero. La *matriz identidad,* o simplemente "la identidad", es la matriz asociada a la función identidad, se le denota por I, y es la matriz que tiene 1 en la diagonal y 0 fuera de ella, es decir

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Cumple además que $AI = A$ e $IA = A$ para cualquier matriz A que se deje multiplicar por ella; es la identidad multiplicativa. Nótese que en realidad hay una identidad para cada dimensión, empezando por el 1; asi que debíamos escribir algo así como I_n, pero el contexto en que se usa siempre trae la información de la dimensión.

Homotesias

Las homotesias, como funciónes, son simples "cambios de escala". Si tomamos un número $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(\mathbf{x}) = k\,\mathbf{x}$ es claramente lineal y es llamada una *homotesia*. Entonces tiene una matriz asociada que es kI, la matriz que tiene puros k en la diagonal y 0 fuera de ella. Como función, lo que hace es expander uniformemente desde el origen (si $k > 1$), o bien, contraer (cuando $k < 1$); son un "zoom", pues.

Las homotesias tienen la propiedad de conmutar con cualquier otra matriz, pues $A(kI) = k(AI) = kA = k\,(IA) = (kI)A$ (y aquí, pudo haber sido que las dos I sean diferentes, depende de A). En términos de funciones, el cambio de escala se puede hacer antes o despues de una función lineal y da lo mismo. Y además son las únicas matrices (pensando en matrices cuadradas) que tienen esta propiedad; pero esto lo dejamos como ejercicio.

EJERCICIO 3.74 Demuestra que si una matriz A de 2×2 es tal que $AB = BA$ para todas las matrices B de 2×2, entonces $A = kI$ para alguna $k \in \mathbb{R}$. (*Tienes que encontrar matrices apropiadas B que te vayan dando información; quizás conviene ver el siguiente parrafo y regresar.*)

Matrices de permutaciones

Recordemos de la Sección 1 que una permutación de n elementos es una función biyectiva $\rho : \Delta_n \to \Delta_n$ donde podemos tomar $\Delta_n = \{1, 2, \ldots, n\}$; y que todas estas permutaciones forman el grupo simétrico de orden n, $\mathbf{S}_n$, con $n!$ elementos. Ahora bien, a cada permutación $\rho : \Delta_n \to \Delta_n$ se le puede asociar la función lineal $f_\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $f_\rho(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{\rho(i)}$; es decir, f_ρ permuta a los elementos de la base canónica de acuerdo a ρ y se extiende linealmente a $\mathbb{R}^n$. A la matriz asociada a esta función lineal se le llama la matriz *de* la permutación ρ; denotémosla A_ρ. Es fácil ver que la multiplicación de matrices de permutaciones es de nuevo una matriz de permutación y corresponde a la composición de las permutaciónes correspondientes. Es decir, si $\rho, \sigma \in \mathbf{S}_n$ entonces $A_\rho A_\sigma = A_{\rho\circ\sigma}$. Se tiene entonces que el grupo simétrico se puede ver como un "grupo de matrices".

Otra manera equivalente de definirlas es que son las matrices cuadradas de ceros y unos tales que tienen exactamente un 1 en cada renglón y en cada columna. Por

ejemplo, la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

corresponde a la permutación $\{1 \mapsto 3, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 1\}$.

EJERCICIO 3.75 Escribe todas las matrices de permutaciones de orden 2.

EJERCICIO 3.76 Escribe todas las matrices de permutaciones de orden 3. Identifica sus inversas (es decir la matriz asociada a la permutación inversa), y describe en cada caso la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ correspondiente.

EJERCICIO 3.77 Sea A_ρ la matriz de la permutación $\rho : \Delta_n \to \Delta_n$, y sea B cualquier otra matriz de $n \times n$. Describe a las matrices BA_ρ y $A_\rho B$ en términos de la permutación ρ.

*EJERCICIO 3.78 Sea C el cubo en $\mathbb{R}^3$ centrado en el origen, de lado 2 y con lados paralelos a los ejes coordenados; es decir, sus vértices son los ocho puntos cuyas tres coordenadas son 1 o -1. Describe el conjunto de matrices cuyas funciones lineales asociadas mandan al cubo en sí mismo. En particular, ¿cuántas son? *(Quizás vale la pena empezar con el problema análogo en dimensión* 2.)

Rotaciones

Regresamos, despues de un provechoso paréntesis, a la motivación original que nos llevo a adentrarnos en las funciones lineales. Dibujo

Sabemos que una rotación es una transformación lineal que manda al vector canónico $\mathbf{e}_1$ en un vector unitario $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^1$ y al otro vector canónico $\mathbf{e}_2$ en su compadre ortogonal $\mathbf{u}^\perp$. Si escribimos a $\mathbf{u}$ en términos de su ángulo respecto al eje x, es decir, respecto a $\mathbf{e}_1$, entonces obtenemos que la matriz asociada a la rotación por un ángulo θ es

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Primero veamos que la rotación de un ángulo $-\theta$ nos regresa a la identidad. Como

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \quad \text{y} \quad \sin(-\theta) = -\sin\theta \tag{3.10}$$

entonces

$$\begin{aligned} R_{-\theta}R_\theta &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta(-\sin\theta) + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I\ . \end{aligned}$$

Podemos obtener las fórmulas trigonométricas clásicas para el coseno y el seno de la suma de ángulos como consecuencia de la composición de funciones y la multiplicación de matrices. Es claro que si rotamos un ángulo β y despues un ángulo α, habremos rotado un ángulo $\alpha+\beta$. Asi que

$$R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta} \ .$$

Pero por otro lado, al multiplicar las matrices tenemos

$$\begin{aligned} R_\alpha R_\beta &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta) \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{aligned} \tag{3.11}$$

pues si dos matrices coinciden ($R_{\alpha+\beta}$ y $R_\alpha R_\beta$) lo hacen entrada por entrada. Junto con las igualdades trigonométricas de inversos de ángulos, estas últimas dan

$$\begin{aligned} \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{aligned} \tag{3.12}$$

EJERCICIO 3.79 Da una expresión numérica bonita de las matrices asociadas a las rotaciones de $\pi/6, \pi/4, \pi/3, 2\pi/3, \pi, -\pi/2$.

EJERCICIO 3.80 Demuestra que

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned}$$

Animacion

Reflexiones??

Conviene parametrizar a las reflexiones no por el ángulo de la imagen de $\mathbf{e}_1$, sino por su mitad, que es el ángulo de la recta-espejo de la reflexión. Pues si, como es natural, a una recta por el origen le asociamos su ángulo (entre 0 y π) con el rayo positivo del eje-x; entonces la reflexión , E_θ, en la recta con ángulo θ manda a $\mathbf{e}_1$ en el vector unitario de ángulo 2θ, y por lo tanto su matriz asociada es

$$E_\theta := \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \ ,$$

pues el segundo vector no es el compadre ortogonal sino su negativo. Es muy fácil ver que $E_\theta E_\theta = I$, que corresponde a que una reflexión es su propia inversa.

Podemos ahora ver como se comporta la composición de reflexiones:

$$\begin{aligned} & E_\alpha E_\beta = \\ = & \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\alpha \sin 2\beta & \cos 2\alpha \sin 2\beta - \sin 2\alpha \cos 2\beta \\ \sin 2\alpha \cos 2\beta - \cos 2\alpha \sin 2\beta & \sin 2\alpha \sin 2\beta + \cos 2\alpha \cos 2\beta \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha-\beta) & -\sin 2(\alpha-\beta) \\ \sin 2(\alpha-\beta) & \cos 2(\alpha-\beta) \end{pmatrix} = R_{2(\alpha-\beta)} \end{aligned}$$

donde hemos usado (3.12). Así que la composición de dos reflexiones es la rotación del doble del ángulo entre sus espejos. Tal y como lo habíamos visto al hablar de generadores de grupos diédricos.

EJERCICIO 3.81 Da una expresión numérica bonita de las matrices asociadas a las reflexiones en espejos a $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4$.

EJERCICIO 3.82 ¿Quiénes son $E_\alpha R_\beta$ y $R_\beta E_\alpha$?

EJERCICIO 3.83 Demuestra con matrices que $R_\beta E_0 R_{-\beta} = E_\beta$.

EJERCICIO 3.84 Demuestra que la fórmula (**??**) obtenida en la Sección **??** para la reflexion φ_ℓ en la linea ℓ, coincide con la que nos da una matriz E_θ cuando la linea ℓ pasa por el origen.

Matrices Ortogonales (y transpuestas)

Decimos que una matriz es *ortogonal* si su función lineal asociada es ortogonal. Según nuestro estudio de las transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$, las matrices ortogonales de 2×2 son las que acabamos de describir: las rotaciones y las reflexiones. Podemos pensar entonces al grupo de transformaciones $\mathbf{O(2)}$ como un grupo de matrices con la operación de multiplicación.

Nótese que en las matrices de rotaciones y reflexiones, la matriz *inversa*, esto es, la matriz asociada a la transformación inversa, resulto ser muy parecida a la original; en las reflexiones es la misma y en las rotaciones se intercambian los elementos fuera de la diagonal (que difieren sólo en el signo). Esto no es coincidencia sino parte de algo mucho más general, que haremos explícito en esta Sección y que será importante en capítulos posteriores..

Llamemos a una matriz *ortogonal* si es cuadrada y su función lineal asociada es una transformación ortogonal (preserva producto interior). Entonces, si A es ortogonal, todas sus columnas son vectores unitarios (pues son la imagen de vectores unitarios,

los canónicos) y además por parejas son ortogonales (pues asi es la base canónica y esto se detecta por producto interior). Dicho más explicitamente, si $A = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ entonces $\mathbf{u}_i = f(\mathbf{e}_i)$ donde f es su función asociada ($f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$), y si $f \in \mathbf{O}(2)$ se cumple que

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

donde δ_{ij} es conocida como "la delta de Kroenecker". En este caso, al conjunto ordenado de vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ se le llama *base ortonormal* (pues son vectores unitarios o normalizados y mutuamente ortogonales). Pero nótese que estos n^2 productos interiores $(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j)$ son las entradas de la matriz

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^\top \\ \mathbf{u}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^\top \end{pmatrix} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_n \end{pmatrix}$$

y que el que sean iguales a la delta de Kroenecker quiere decir que esta es la matriz identidad. Así que si llamamos *transpuesta* de una matriz a la que se obtiene cambiando columnas por renglones, hemos demostrado que la "inversa" de una matriz ortogonal es su transpuesta.

En general, llamemos la *transpuesta* de una matriz $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ a la matriz

$$A^\top = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^\top \\ \mathbf{v}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^\top \end{pmatrix}$$

que se obtiene reflejando las entradas en la diagonal; si A es $m \times n$ entonces $A^\top$ es $n \times m$ y se generaliza nuestra noción previa de transpuestos de vectores. Hemos demostrado la mitad del siguiente Teorema. Su otra mitad, para el caso que más nos interesa, $n = 2$, es consecuencia inmediata de la Proposición 3.3.3. Sin embargo damos una nueva demostración, muy general, para ejemplificar el poder de la notación matricial.

Teorema 3.5.2 *Una matriz A de $n \times n$ es ortogonal (la matriz de una transformación ortogonal) si y sólo si*

$$A^\top A = I$$

Demostración. Hemos demostrado que si la función $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ preserva producto interior entonces su matriz cumple que $A^\top A = I$. Supongamos ahora que $A^\top A = I$ y

demostremos que su transformación asociada preserva producto interior. Para esto, expresaremos al producto interior como un caso mas del producto de matrices. Para cualquier $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) = A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = (A\mathbf{x})^\top A\mathbf{y} = \left(\mathbf{x}^\top A^\top\right) A\mathbf{y} = \mathbf{x}^\top \left(A^\top A\right)\mathbf{y} = \mathbf{x}^\top (I)\,\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

donde hemos usado que $(A\mathbf{x})^\top = \mathbf{x}^\top A^\top$ (lo cual es un caso particular de la fórmula $(AB)^\top = B^\top A^\top$ que se deja como ejercicio). Por lo tanto, f (y A) es ortogonal. □

Asi que aunque las entradas de las matrices ortogonales sean complicadas, encontrar sus inversas es muy fácil. Y se explica porque las inversas de las ortogonales 2×2 fueron tan parecidas a si mismas.

EJERCICIO 3.85 Sea $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v} + z\,\mathbf{w}$$

Demuestra directamente que f es ortogonal (preserva producto interior). (Compara con la Proposición 3.3.3).

EJERCICIO 3.86 Demuestra que $(A\mathbf{x})^\top = \mathbf{x}^\top A^\top$ cuando A es una matriz $m \times n$ y $\mathbf{x}$ un vector $(n \times 1)$.

EJERCICIO 3.87 Demuestra que $(AB)^\top = B^\top A^\top$ cuando A es una matriz $m \times n$ y B una matriz $(n \times k)$.

EJERCICIO 3.88 Demuestra que la "matriz de Pitágoras"

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

es ortogonal.

3.6 El Grupo General Lineal ($\mathbf{GL}(2)$)

En esta sección estudiamos a las matrices cuyas funciones lineales asociadas son transformaciones, es decir, biyectivas. La definición abstracta será entonces muy fácil, aunque despues habrá que hacerla más concreta.

Definición 3.6.1 Una matriz A de $n \times n$ es *invertible* si existe otra matriz de $n \times n$, llamada su *inversa* y denotada A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Al conjunto de todas las matrices invertibles de $n \times n$ se le llama el *grupo general lineal de orden* n y se le denota $\mathbf{GL}(n)$. Asi que $A \in \mathbf{GL}(n)$ quiere decir que A es invertible y de $n \times n$.

Para demostrar que las transformaciones lineales $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tienen matrices asociadas que son invertibles sólo habría que ver que su función inversa también es lineal (ver Ejercicio siguiente), y entonces la matriz asociada a ésta será la inversa. Y al revez, si una matriz tiene inversa entonces las funciones lineales asociadas también son inversas. Asi que a $\mathbf{GL}(2)$ se le puede pensar como grupo de transformaciones, tal y como lo hicimos en las primeras secciones de este capítulo, o bien como grupo de matrices (donde, hay que enfatizar, la operación del grupo es la multiplicación de matrices).

Ejemplos de matrices invertibles son las ortogonales que ya hemos visto. Asi, tenemos que $\mathbf{O}(n)$ es un subgrupo de $\mathbf{GL}(n)$.

EJERCICIO 3.89 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal; es decir, una función lineal con inversa $f.^{-1}$. Demuestra que su inversa también es lineal.

3.6.1 El determinante

Veámos ahora el problema de detectar de manera sencilla las matrices invertibles de 2×2. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

una matriz cualquiera de 2×2. Consideremos el problema general de encontrar su inversa, y de paso ver cúando esta existe. Tomemos entonces una mátriz X cuyas entradas son incógnitas, digamos x, y, z, w, que cumplan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto nos da un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, que en realidad se parte en los dos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas siguientes

$$\begin{array}{l} a\,x + b\,y = 1 \\ c\,x + d\,y = 0 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{l} a\,z + b\,w = 0 \\ c\,z + d\,w = 1 \end{array}$$

que provienen de cada una de las columnas de la identidad, o bien de las columnas de incógnitas. Recordando la Sección 1.6, o bien volviéndolo a resolver, se obtiene que si $ad - bc \neq 0$ entonces los dos sistemas tienen soluciónes únicas que son precisamente

$$\begin{array}{rcll} x & = & \dfrac{d}{ad-bc} & z = \dfrac{-b}{ad-bc} \\ y & = & \dfrac{-c}{ad-bc} & w = \dfrac{a}{ad-bc}\,. \end{array} \tag{3.13}$$

Para enunciar esto de manera elegante conviene definir el *determinante* de la matriz A como el número

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc \ .$$

Nótese que si $A = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$, entonces $\det(A) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ según lo definimos en la Sección 1.7, de tal manera que el determinante de una matriz es el determinante de sus columnas o el determinante de un sistema de ecuaciones asociado y sólo estamos ampliando naturalmente el espectro del término.

Teorema 3.6.1 *Sea* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *entonces* A *es invertible si y sólo si* $\det(A) = ad - bc \neq 0$*; y en este caso*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \ .$$

Hemos demostrado que si $\det(A) \neq 0$ entonces A es invertible y su inversa tiene la expresión indicada por (3.13). Nos falta ver que si A tiene inversa entonces su determinante no es cero. Pero esto será consecuencia inmediata del siguiente lema que nos da el determinante de un producto.

Lema 3.6.1 *Sean* A *y* B *matrices* 2×2*, entonces* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Demostración. Sea A como arriba y consideremos a B con letras griegas. Se tiene entonces

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix} \\
&= (a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (a\beta + b\delta)(c\alpha + d\gamma) \\
&= a\alpha c\beta + a\alpha d\delta + b\gamma c\beta + b\gamma d\delta \\
&\quad -a\beta c\alpha - a\beta d\gamma - b\delta c\alpha - b\delta d\gamma \\
&= ad(\alpha\delta - \beta\gamma) + bc(\beta\gamma - \alpha\delta) \\
&= (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) = \det(A)\det(B).
\end{aligned}$$

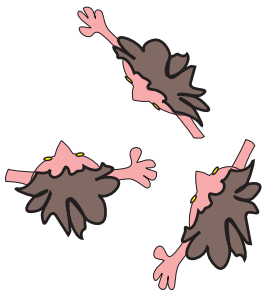
□

Demostración. [(del Teorema 3.6.1)] Si A es una matriz invertible entonces existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$. Por el Lema anterior se tiene entonces que $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I) = 1$, y por lo tanto $\det(A)$ no puede ser 0. □

Veamos por último que el determinante de una matriz tiene un significado geométrico. Por el Teorema 1.11.3, corresponde al área dirigida del paralelogramo generado por sus vectores columna.

Teorema 3.6.2 *Sea A una matriz 2×2, entonces* $\det(A)$ *es el área del paralelogramo definido por sus vectores columna.* □

Se dice que la matriz A, o que la función $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, *invierte orientación* si $\det(A) < 0$, o bien, que la *preserva* si $\det(A) > 0$. Esto corresponde a que cualquier figura que no tenga simetrías de espejo (por ejemplo, un "manquito" de la mano derecha) se puede orientar, y bajo transformaciones lineales que preservan orientación, la figura puede deformarse pero conserva su orientación (el manquito seguira siendo manquito de la mano derecha); pero bajo transformaciones que invierten orientación se verá como manquito de la otra mano.



Pero además, el determinante de A representa lo que la función f "distorsiona" las áreas. Es decir, si una figura cualquiera F tiene área a, entonces $f(F)$ tendrá área $a\,|\det(A)|$. Sin pretender dar una demostración formal de esto, en general se puede argumentar como sigue. Puesto que la imagen del cuadrado unitario, C, bajo la función f asociada a la matriz $A = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$, es el paralelogramo generado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, primero hay que ver que cuadraditos con lados paralelos a los ejes y de lado ε (y área ε^2) van a dar a paralelogramos de área $\varepsilon^2 \det(A)$; y luego observar que las áreas se pueden aproximar por cuadraditos disjuntos de este tipo. Con esta interpretación geométrica del determinante es natural que el determinante de un producto sea el producto de los determinantes, pues el factor de distorción de áreas de una composición debía de ser el producto de factores de distorsión.

Observemos por último que el determinante distingue a nuestras dos clases de matrices ortogonales (en $\mathbf{O}(2)$); es 1 para las rotaciones, y -1 para las reflexiones. Es decir, las rotaciones preservan orientación y las reflexiones la invierten. Además su multiplicación corresponde a cómo se multiplican 1 y -1.

EJERCICIO 3.90 Demuestra que el determinante de las rotaciones es 1 y el de las reflexiones -1.

EJERCICIO 3.91 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal asociada a la matriz $A \in \mathbf{GL}(2)$, y sea T cualquier triángulo en el plano. Demuestra que el area de $f(T)$ es $|\det(A)|$ por el area de T.

EJERCICIO 3.92 Sea $\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$; y sea $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{\mathbf{0}\}$, es decir, todo $\mathbb{C}$ menos la matriz $\mathbf{0}$. Describe las funciones lineales asociadas. Demuestra que $\mathbb{C}^*$ es un subgrupo de $\mathbf{GL}(2)$. Compara a estas matrices con los números complejos.

EJERCICIO 3.93 Encuentra (en cada caso) la matriz de la transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que cumple:

a) $f(2,1) = (1,0)$ y $f(3,2) = (0,1)$
b) $f(2,5) = (1,0)$ y $f(1,2) = (0,1)$
c) $f(2,1) = (2,5)$ y $f(3,2) = (1,2)$

(donde hemos usado vectores renglón en vez de vectores columna por simplicidad).

EJERCICIO 3.94 Demuestra que una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ manda rectas en rectas.

EJERCICIO 3.95 Considera las rectas $(\ell_1 : x + y = 2)$; $(\ell_2 : 2x - y = 1)$; $(\ell_3 : 2x + y = 6)$ y $(\ell_4 : x - 4y = 3)$. Encuentra la transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que cumple $f(\ell_1) = \ell_3$ y $f(\ell_2) = \ell_4$.

3.7 Transformaciones Afines

El papel que jugaron las transformaciones ortogonales respecto de las isometrías lo jugaran ahora las transformaciones lineales respecto de las que llamaremos afines. Es decir, si componemos una transformación lineal con una translación no trivial, ya no obtenemos una lineal (pues el origen se mueve) sino algo que llamaremos transformación afín, generalizando para $n > 1$ a las transformaciones afínes de $\mathbb{R}$, que ya estudiamos.

Definición 3.7.1 Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una *transformación afín* si se escribe Dibujo

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, donde $A \in \mathbf{GL}(n)$ y $\mathbf{b}$ es un vector fijo en $\mathbb{R}^n$. Dicho de otra manera, f es una *transformación afín* si existe una transformación lineal $f_o : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(f_o(\mathbf{x}) = A\mathbf{x})$ y una translación $\tau_{\mathbf{b}}$ tales que

$$f = \tau_{\mathbf{b}} \circ f_o \ .$$

El conjunto de todas las transformaciones afines de $\mathbb{R}^n$ forman un grupo de transformaciones, llamado el *grupo afín de* $\mathbb{R}^n$ y denotado $\mathbf{Af}(n)$.

Lo primero que hay que observar es que una transformación afín es efectivamente una transformación; y esto es claro pues es la composición de dos funciones biyectivas. Para ver que $\mathbf{Af}(n)$ es efectivamente un grupo, hay que ver que es cerrado bajo inversas y composición, pues la identidad (y de hecho cualquier transformación lineal) esta en $\mathbf{Af}(n)$. Si $f \in \mathbf{Af}(n)$ (dada por la fórmula de la definición) para obtener la fórmula explicita de su inversa, despejaremos a $\mathbf{x}$ en la ecuación

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

donde $\mathbf{y}$ juega el papel de $f(\mathbf{x})$. Pasando a $\mathbf{b}$ del otro lado y luego multiplicando por A^{-1} (que existe pues $A \in \mathbf{GL}(n)$) se obtiene

$$\mathbf{x} = (A^{-1})\mathbf{y} - (A^{-1})\mathbf{b}.$$

Sea entonces $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por la ecuación $g(\mathbf{x}) = (A^{-1})\mathbf{x} - (A^{-1})\mathbf{b}$ (nótese que $g \in \mathbf{Af}(n)$ por definición) y se tiene que

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\mathbf{x}) &= g(A\mathbf{x} + \mathbf{b}) \\ &= (A^{-1})(A\mathbf{x} + \mathbf{b}) - (A^{-1})\mathbf{b} \\ &= \left(A^{-1}A\right)\mathbf{x} + A^{-1}\mathbf{b} - A^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{x} \end{aligned}$$

y análogamente se tiene que $(f \circ g)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, así que g es la inversa de f.

Si tomamos ahora a $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como cualquier otra transformación afín, entonces se escribe $g(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$ para algunos $B \in \mathbf{GL}(n)$ y $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ de tal forma que $(g \circ f)$ también es una transformación afín pues se escribe

$$(g \circ f)(\mathbf{x}) = B(A\mathbf{x} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = (BA)\mathbf{x} + (B\mathbf{b} + \mathbf{c}) \ .$$

Dibujo

Por lo tanto, $\mathbf{Af}(n)$ sí es un grupo de transformaciones.

Las transformaciones afines preservan rectas, es decir, mandan rectas en rectas. Pues si una recta ℓ está definida como

$$\ell = \{\mathbf{p} + t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

y $f \in \mathbf{Af}(n)$, es como arriba, entonces

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) &= A(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) + \mathbf{b} \\ &= (A\mathbf{p} + \mathbf{b}) + t(A\mathbf{v}) \\ &= f(\mathbf{p}) + t(A\mathbf{v}) \end{aligned}$$

de tal manera que

$$f(\ell) \subseteq \{f(\mathbf{p}) + t(A\mathbf{v}) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Y este último conjunto es la recta que pasa por $f(\mathbf{p})$ con dirección $A\mathbf{v}$ (nótese que $A\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, pues $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y A es invertible); así que más que una contención, la última es justo una igualdad (ambos conjuntos están parametrizados por $\mathbb{R}$).

Resulta que las transformaciones afines son precisamente las que preservan rectas. Pero la demostración de que si una transformación preserva rectas es afín es complicada y requiere argumentos de continuidad que no vienen al caso en este momento. Asi que mejor nos enfocamos en otra cosa que sí preservan.

3.7.1 Combinaciones afines (el Teorema de 3 en 3)

Dibujo

Otra manera de ver que las transformaciones afines preservan rectas es usando coordenadas baricéntricas. Sea ℓ la recta que pasa por los puntos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$. Entonces ℓ se puede escribir como

$$\ell = \{s\mathbf{p} + t\mathbf{q} \mid s, t \in \mathbb{R}, \quad s + t = 1\}.$$

Veamos que le hace la transformación afín f al punto $s\mathbf{p} + t\mathbf{q}$ cuando $s + t = 1$:

$$\begin{aligned} f(s\mathbf{p} + t\mathbf{q}) &= A(s\mathbf{p} + t\mathbf{q}) + \mathbf{b} \\ &= s(A\mathbf{p}) + t(A\mathbf{q}) + (s + t)\mathbf{b} \\ &= s(A\mathbf{p} + \mathbf{b}) + t(A\mathbf{q} + \mathbf{b}) \\ &= s\,f(\mathbf{p}) + t\,f(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\mathbf{b} = s\mathbf{b} + t\mathbf{b}$ pues $s + t = 1$. Asi que la recta por $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ va, bajo f, a la recta por $f(\mathbf{p})$ y $f(\mathbf{q})$ y preserva las coordenadas baricéntricas. Y esto se puede generalizar.

Una combinación lineal $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i$ se llama *combinación afín* si los coeficientes cumplen que $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$. Le hemos llamado "combinación baricéntrica" cuando intervienen dos puntos distintos o tres no colineales, pero en el caso general no nos interesa qué propiedades tengan los puntos involucrados $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. Su importancia, entre otras cosas, es que las transformaciones afines las tratan como las lineales tratan a las combinaciones lineales:

Teorema 3.7.1 *Una transformación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es afín si y sólo si preserva combinaciones afines; es decir, si y solo si*

$$f(\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f(\mathbf{v}_i) \quad \textit{cuando} \quad \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1\ .$$

Demostración. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es afín, entonces se escribe $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ para alguna matriz A de $n \times n$ y un vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Veamos que preserva combinaciones afines. Sean $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, k$, tales que $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$; y sean $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 0, 1, \ldots, k$, vectores cualesquiera. Entonces

$$\begin{aligned} f(\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i) &= A(\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i) + \mathbf{b} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i (A\mathbf{v}_i) + \mathbf{b} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \lambda_i (A\mathbf{v}_i) + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \mathbf{b} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i (A\mathbf{v}_i + \mathbf{b}) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f(\mathbf{v}_i). \end{aligned}$$

Donde usamos la linearidad en la segunda igualdad, y luego fué crucial que $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$ para poder "distribuir la $\mathbf{b}$" en la sumatoria.

Por el otro lado, si nos dan f que preserva combinaciones afines, debemos encontrar la matriz A (o su función lineal asociada) y el vector $\mathbf{b}$ que la definan. Encontrar al vector $\mathbf{b}$ es fácil pues es a donde cualquier transformación afín manda al origen; definamos entonces

$$\mathbf{b} := f(\mathbf{0}).$$

Y, como sucedió con las isometrías, debemos definir la función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por

$$g(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}$$

y demostrar que es lineal para concluir la demostración; pues entonces $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$. Veámos entonces que g preserva combinaciones lineales.

Sean $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vectores en $\mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ coeficientes (en $\mathbb{R}$) arbitrarios. Debemos demostrar que $g\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i g(\mathbf{v}_i)$ pero nuestra hipótesis sólo nos dice cómo se comporta f respecto a combinaciones afines. Podemos convertir a esta combinación lineal en una afín usando al vector $\mathbf{0}$ como comodín. Sean

$$\mathbf{v}_0 := \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \lambda_0 := 1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i$$

de tal manera que $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$ (ojo, empezamos la sumatoria en 0) y $\sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{v}_i$; y ahora sí podemos usar nuestra hipótesis para obtener

$$\begin{aligned} g\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{v}_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{v}_i\right) - \mathbf{b} &&= f\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{v}_i\right) - \left(\sum_{i=0}^k \lambda_i\right)\mathbf{b} \\ &= \sum_{i=0}^k \lambda_i f(\mathbf{v}_i) - \sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{b} &&= \sum_{i=0}^k \lambda_i \left(f(\mathbf{v}_i) - \mathbf{b}\right) \\ &= \sum_{i=0}^k \lambda_i g(\mathbf{v}_i) &&= \lambda_0 g(\mathbf{v}_0) + \sum_{i=1}^k \lambda_i g(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i g(\mathbf{v}_i) \end{aligned}$$

pues $g(\mathbf{v}_0) = g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Lo cual concluye la demostración del Teorema. □

Vale la pena notar que el concepto de transformación afín se puede generalizar al de función afín cuando la matriz A no es necesariamente invertible; una *función afín* será entonces una función lineal seguida de una translación; ni siquiera necesitamos pedir que el dominio y el codominio coincidan. Si se revisa con cuidado el Teorema anterior, se notará que vale en esta generalidad. Pero no lo hicimos así pues nuestro
Dibujo interes principal está en las transformaciones.

En el caso que más nos interesa, $n = 2$, este Teorema y su demostración tienen como corolario que una transformación afín de $\mathbb{R}^2$ queda determinada por sus valores en el *triángulo canónico* con vértices $\mathbf{e}_0 := \mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, y que estos pueden ir a

cualquier otro triángulo. Explicitamente, dado un triángulo T con vértices $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, la transformación afín que manda al triángulo canónico en T es

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_0)\mathbf{x} + \mathbf{a}_0 \ ,$$

que cumple claramente que $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{a}_i$. Hay que observar que esta función está bien definida independientemente de quiénes sean $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$, pues tanto la matriz 2×2 como el vector por el que se translada lo están. Pero que es una transformación sólo cuando $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ no son colineales (que es lo que entendemos como *triángulo*), pues entonces la matriz es invertible.

Y como corolario a este hecho obtenemos el siguiente Teorema.

Dibujo

Teorema 3.7.2 (3 en 3) *Dados dos triángulos con vértices* $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *y* $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ *respectivamente, existe una única transformación afín* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *que cumple* $f(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ *para* $i = 0, 1, 2$.

Demostración. Basta componer la inversa de la transformación que manda al triángulo canónico en el $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ con la que lo manda al $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. La unicidad se sigue de la unicidad de las dos transformaciones usadas. □

Un ejemplo

Para fijar ideas veamos un ejemplo numérico. Sean

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{b}_0 &= \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Queremos encontrar la transformación afín $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que cumple $f(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ para $i = 0, 1, 2$.

Un método infalible (si no cometemos un error en el camino) es seguir la demostración del último teorema. Es decir, la transformación que manda al canónico en el triángulo de las $\mathbf{a}$'s es

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

luego habrá que encontrar su inversa y componerla con la que manda al canónico en el triángulo de las $\mathbf{b}$'s. Pero dejaremos este método para que el lector lo siga paso a paso y compruebe el resultado con una solución diferente que es la que aquí seguiremos.

Ataquemos el problema directamente. Estamos buscando una matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{y un vector} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

para definir la función $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}+\mathbf{b}$ que cumpla $f(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ para $i = 0, 1, 2$. Como las $\mathbf{a}$'s y las $\mathbf{b}$'s tienen valores numéricos explicitos, estas condiciones nos darán ecuaciones explicitas con las seis incógnitas $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$ que podemos resolver directamente. La condición $f(\mathbf{a}_0) = \mathbf{b}_0$ nos da

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

que se traduce en una ecuación para cada coordenada, a saber:

$$\begin{aligned} 0\alpha + 2\beta + \lambda &= -5 \\ 0\gamma + 2\delta + \mu &= 6 \end{aligned}$$

Analogamente, las condiciones en las otros dos parejas de puntos nos dan las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} 3\alpha - \beta + \lambda &= 4 \\ 3\gamma - \delta + \mu &= 3 \\ -\alpha + \beta + \lambda &= -4 \\ -\gamma + \delta + \mu &= 1 \end{aligned}$$

Resulta que en vez de seis ecuaciones con seis incógnitas, tenemos dos sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas, y además los dos sistemas tienen los mismos coeficientes y sólo se diferencián por las constantes. De hecho los podemos reescribir como

$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

$$\text{donde} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Observemos que al resolver los dos sistemas de ecuaciones con el método de eliminar variables sumando múltiplos de una ecuación a otra, estaremos realizando las mismas operaciones, y estas dependen nada mas de los coeficientes, no del nombre de las incógnitas. Así que la manera de resolver los dos sistemas al mismo tiempo será añadiéndole dos columnas a la matriz A que correspondan a las constantes de los dos sistemas, y luego sumando multiplos de renglones a otros para llevar la parte 3×3 de la matriz a una de permutaciones que nos diga el valor explícito de todas las incógnitas. Hagámoslo. La matriz con que empezamos es

$$\left(\begin{array}{ccc:c:c} 0 & 2 & 1 & -5 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right) .$$

Sumándole 3 veces el renglón 3 al 2 (para hacer 0 esa entrada), operación que podemos denotar $3\mathbf{r}_3\vec{+}\mathbf{r}_2$ y que equivale a sumarle un múltiplo de una ecuación a otra, obtenemos

$$\underrightarrow{3\mathbf{r}_3\vec{+}\mathbf{r}_2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & -8 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}\underrightarrow{-\mathbf{r}_2\vec{+}\mathbf{r}_1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -8 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underrightarrow{(1/2)\mathbf{r}_2;-(1/3)\mathbf{r}_1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}\underrightarrow{\mathbf{r}_2\vec{+}\mathbf{r}_3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underrightarrow{-2\mathbf{r}_1\vec{+}\mathbf{r}_2;-\mathbf{r}_1\vec{+}\mathbf{r}_3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ahora, recordando nuestras incógnitas, el primer sistema nos dice $\lambda = -1$, $\beta = -2$ y $\alpha = 1$ y el segundo sistema $\mu = 0$, $\delta = 3$ y $\gamma = 2$ lo cual lo resuelve por completo. En resumen, la función que buscabamos es

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y es fácil comprobarlo; bien checando los valores que se pedían o por el otro método.

EJERCICIO 3.96 Para cada caso, encuentra la transformación afín que manda $\mathbf{a}_i$ en $\mathbf{b}_i$

a) $\mathbf{a}_0^\top = (1,2), \mathbf{a}_1^\top = (1,-1), \mathbf{a}_2^\top = (0,-1)$ y $\mathbf{b}_0^\top = (1,4), \mathbf{b}_1^\top = (4,4), \mathbf{b}_2^\top = (3,3)$
b) $\mathbf{a}_0^\top = (1,2), \mathbf{a}_1^\top = (0,1), \mathbf{a}_2^\top = (3,-1)$ y $\mathbf{b}_0^\top = (5,3), \mathbf{b}_1^\top = (2,0), \mathbf{b}_2^\top = (6,-1)$
c) $\mathbf{a}_0^\top = (1,2), \mathbf{a}_1^\top = (0,1), \mathbf{a}_2^\top = (3,-1)$ y $\mathbf{b}_0^\top = (10,5), \mathbf{b}_1^\top = (3,3), \mathbf{b}_2^\top = (-4,4)$

(¿Verdad que conviene relajar la notación sobre vectores?)

3.8 Isometrías II

Ya con la herramienta técnica que nos dan las matrices y en el contexto general que nos dan las transformaciones afines, regresamos brevemente a estudiar isometrías del plano y ver algunas cosas que se nos quedaron pendientes. Ahora sabemos que una isometría de $\mathbb{R}^2$ es una transformación que se escribe

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b} \tag{3.14}$$

donde la matriz A es ortogonal ($A^\top = A^{-1}$) y es llamada la *parte lineal* de la isometría. Hay de dos tipos. Las que preservan orientación (con $\det(A) = 1$) y las que invierten

orientación ($\det(A) = -1$). Para las primeras, la matriz A es una rotación en el origen y para las segundas, una reflexión en una recta por el origen. Puesto que al componer isometrías (o, en general, transformaciones afines) la parte lineal se obtiene componiendo las partes lineales, entonces las isometrías (o las afines) que preservan orientación forman un grupo, denotado $\mathbf{Iso}^+(2)$ (respectivamente, $\mathbf{Af}^+(2)$). Ojo, las que invierten orientación **no** forman un grupo, ni siquiera contienen a la identidad y la composición de dos de ellas preserva orientación.

Lo primero que queremos ver es que las isometrías que preservan orientación son rotaciones en algún punto o translaciones.

3.8.1 Rotaciones y translaciones

Recordemos que definimos la rotación $\rho_{\theta,\mathbf{c}}$ de un ángulo θ con centro $\mathbf{c}$ conjugando con la translación de $\mathbf{c}$ al origen, es decir, como $\tau_{\mathbf{c}} \circ \rho_\theta \circ \tau_{-\mathbf{c}}$ donde $\tau_{\mathbf{y}}$ es la translación por $\mathbf{y}$ y ρ_θ es rotar un ángulo θ en el origen, así que, usando matrices, la fórmula para $\rho_{\theta,\mathbf{c}}$ es

$$\begin{aligned} \rho_{\theta,\mathbf{c}}(\mathbf{x}) &= R_\theta(\mathbf{x}-\mathbf{c})+\mathbf{c} \\ &= R_\theta\mathbf{x}+(\mathbf{c}-R_\theta\mathbf{c}) \end{aligned} \tag{3.15}$$

Es claro entonces que $\rho_{\theta,\mathbf{c}} \in \mathbf{Iso}^+(2)$, pues se escribe como en (3.14) con una $\mathbf{b}$ complicada, pero constante al fin. Y al reves, aunque cierto, no es tan claro. Para ver que $f \in \mathbf{Iso}^+(2)$ dada como en (3.14) es la rotación en algún centro, hay que encontrar un punto fijo, es decir, un punto $\mathbf{c}$ para el cual $f(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ (pues a su centro no lo mueve la rotación); que nos da la ecuación en $\mathbf{c}$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= A\mathbf{c}+\mathbf{b} \\ \mathbf{c}-A\mathbf{c} &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

Esto coincide con la expresión (3.15), donde se usa al centro de rotación y nos da la translación $\mathbf{b}$ en términos de él. Entonces, el problema de encontrar un punto fijo para la transformación (3.14) equivale a encontrar una solución a la ecuación

$$\mathbf{x}-A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

que en realidad es un sistema de ecuaciones. Y como tal, se puede reescribir

$$\begin{aligned} I\mathbf{x}-A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ (I-A)\mathbf{x} &= \mathbf{b} \end{aligned} \tag{3.16}$$

donde nos ha sido muy util la suma de matrices. Sabemos que este sistema tiene solución única si y sólo si su determinante es distinto de cero. Para el caso que nos

ocupa, cuando A es una matriz de rotación, por un ángulo θ digamos, se tiene

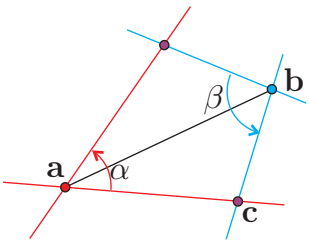
$$\begin{aligned}\det(I - R_\theta) &= \det\begin{pmatrix} 1-\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= (1-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta \\ &= 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 2(1-\cos\theta).\end{aligned}$$

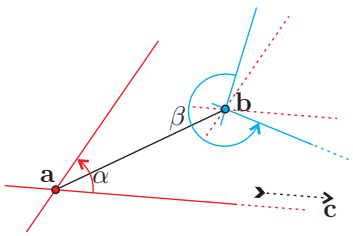
Podemos concluir que si $\theta \neq 0$ entonces $\det(I - R_\theta) \neq 0$ y tenemos una solución única al sistema (3.16) con $A = R_\theta$, que es el centro de rotación. Así que si $f \in \mathbf{Iso}^+(2)$ entonces es una rotación (alrededor de un punto) o bien una translación (cuando el ángulo θ es cero en la discusión anterior). Además, hemos demostrado que una rotación (por un ángulo no cero, se sobreentiende) no tiene puntos fijos además de su centro.

Puesto que a una rotación o a una translación se le puede obtener *moviendo* continuamente (poco a poco) al plano, a veces se le llama a $\mathbf{Iso}^+(2)$ el grupo de *movimientos rígidos del plano*.

Como corolario se obtiene que la composición de dos rotaciones es una nueva rotación. El nuevo centro de rotación se puede obtener analíticamente resolviendo el correspondiente sistema de ecuaciones, pero lo veremos geométricamente.

Sean $\rho_{\alpha,\mathbf{a}}$ y $\rho_{\beta,\mathbf{b}}$ las rotaciones de ángulos α y β y centros $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ respectivamente. La composición de estas dos rotaciones será una rotación de un ángulo $\alpha+\beta$ (pues las partes lineales se componen) pero su centro depende del orden en que se componen. Para obtener el centro de la rotación $\rho_{\beta,\mathbf{b}} \circ \rho_{\alpha,\mathbf{a}}$, se traza el segmento de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, la linea por $\mathbf{a}$ con ángulo $-\alpha/2$ respecto a este y la linea por $\mathbf{b}$ con ángulo $\beta/2$; la intersección $\mathbf{c}$ de estas dos lineas es el centro de rotación. Para verlo, persigase a este punto bajo las rotaciones. Nótese que su reflejado respecto a la linea por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es el centro de rotación de la composición en el otro orden, $\rho_{\alpha,\mathbf{a}} \circ \rho_{\beta,\mathbf{b}}$.





Para que nuestra construcción de $\mathbf{c}$ tuviera sentido se necesita que las dos rectas cuya intersección lo definen sean no paralelas y este es justo el caso cuando $\alpha+\beta \neq 0$. Pero nos podemos aproximar al valor $\beta = -\alpha$ de a poquitos, y en este proceso el punto de intersección $\mathbf{c}$ se "va al infinito", asi que las translaciones son, en cierta manera "rotaciones con centro al infinito".

EJERCICIO 3.97 Las *homotesias* son transformaciones de la forma $f(\mathbf{x}) = k\,\mathbf{x} + \mathbf{b}$ con $k \neq 0$ llamado el *factor de expansión*. Demuestra que las homotesias con factor de expansión no trivial (distinto de 1) tienen un *centro de expansión*, es decir, un punto fijo.

3.8.2 Reflexiones y "pasos"

Consideremos ahora las isometrías que invierten orientación. Se escriben como

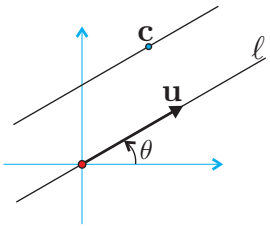
$$f(\mathbf{x}) = E_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

donde E_θ es una matriz de reflexión. Veámos primero si tiene puntos fijos, para lo cual hay que resolver el correspondiente sistema (3.16). En este caso el determinante es

$$\begin{aligned} \det(I - E_\theta) &= \det \begin{pmatrix} 1-\cos 2\theta & -\operatorname{sen} 2\theta \\ -\operatorname{sen} 2\theta & 1+\cos 2\theta \end{pmatrix} \\ &= (1-\cos 2)(1+\cos 2\theta) - \operatorname{sen}^2 2\theta \\ &= 1 - \cos^2 2\theta - \operatorname{sen}^2 2\theta = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

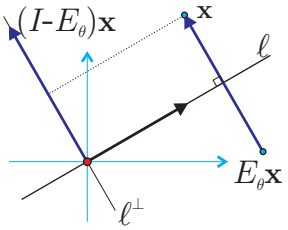
Y por lo tanto no tiene solución única: o no tiene solución o bien tiene muchas; y veremos que ambos casos son posibles.

Para $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ tenemos que f es una reflexión y entonces las soluciones deben ser los puntos de la recta espejo (a un ángulo θ con el eje-x positivo), llamémosla ℓ. Veámos. Sea $\mathbf{u}$ el vector unitario que genera a ℓ, es decir, $\mathbf{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Entonces

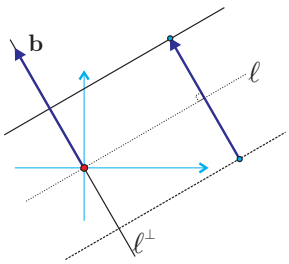


$$\begin{aligned} E_\theta \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta \cos\theta + \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta \cos\theta - \cos 2\theta \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta - \theta) \\ \operatorname{sen}(2\theta - \theta) \end{pmatrix} = \mathbf{u} \end{aligned}$$

donde hemos usado las fórmulas trigonométricas para la diferencia de ángulos (3.12). Y por lo tanto $E_\theta(t\,\mathbf{u}) = t\,(E_\theta \mathbf{u}) = t\,\mathbf{u}$; que nos dice que todos los puntos de la recta ℓ satisfacen la ecuación homogénea $(I - E_\theta)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ahora bien, si para cierta $\mathbf{b}$, el sistema $(I - E_\theta)\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución particular, $\mathbf{c}$ digamos, enonces toda la recta $\ell + \mathbf{c}$, paralela a ℓ que pasa por $\mathbf{c}$, consta de soluciones al sistema; es una reflexión con espejo $\ell + \mathbf{c}$. Pero nos falta determinar para cuáles $\mathbf{b}$ hay solución.

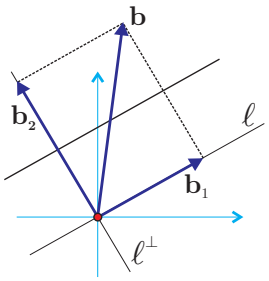


Para esto, conviene pensar geométricamente. Para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $(I - E_\theta)\,\mathbf{x} = \mathbf{x} - E_\theta \mathbf{x}$ es el vector que va de $E_\theta \mathbf{x}$ a $\mathbf{x}$, y como E_θ es una reflexión debe ser perpendicular al espejo; es más, debe ser el doble del vector que va de ℓ a $\mathbf{x}$ y es perpendicular a ℓ (recuérdese que así definimos reflexiones por primera vez). De tal manera que $(I - E_\theta)$ es, como función, la proyección ortogonal a $\ell^\perp : \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$ seguida de la homotesia "multiplicar por 2". La imagen de la función $(I - E_\theta)$ es entonces $\ell^\perp$, y por lo tanto, sólo cuando $\mathbf{b} \in \ell^\perp$ la isometría $f(\mathbf{x}) = E_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b}$ tiene puntos fijos. Más concretamente, si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{b} = 0$, entonces reflejar en ℓ y luego transladar por $\mathbf{b}$, regresa a la recta $\ell + (1/2)\,\mathbf{b}$ a su lugar (y punto a punto).



En el caso general, podemos expresar a cualquier $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ como una suma de sus *componentes* respecto a la base ortonormal $\mathbf{u}, \mathbf{u}^\perp$, es decir como

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$$

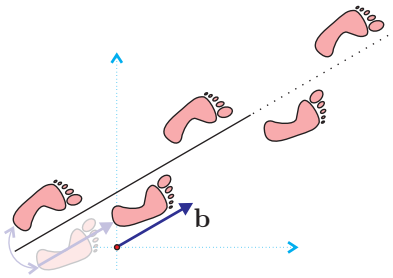


con $\mathbf{b}_1 \in \ell$ y $\mathbf{b}_2 \in \ell^\perp$ (de hecho, por el Teorema de bases ortonormales: $\mathbf{b}_1 := (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})\,\mathbf{u}$ y $\mathbf{b}_2 := \left(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^\perp\right)\mathbf{u}^\perp$). Y entonces la transformación $f(\mathbf{x}) = E_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b}$ se puede escribir como

$$f(\mathbf{x}) = (E_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_1$$

que es una reflexión en la recta $\ell + (1/2)\,\mathbf{b}_2$ (por el caso anterior) y que en la fórmula es $(E_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b}_2)$, seguida de una translación $(\ldots + \mathbf{b}_1)$ en la dirección del espejo. Nótese que si $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{0}$, entonces f no tiene puntos fijos, los puntos de un lado del espejo van al otro lado y los que estan en el espejo se transladan en él, aunque el espejo $\ell + (1/2)\,\mathbf{b}_2$ como linea sí se queda en su lugar (todos sus puntos se mueven dentro de ella) y este es entonces el caso en que nuestro sistema de ecuaciones que detecta puntos fijos no tiene solución.

A una isometría tal, una reflexión seguida de una translación no trivial ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$) en la dirección de la linea espejo, la llamaremos un *paso* pues genera la simetría que tiene un caminito de huellas (infinito) y corresponde al acto de dar un paso: cambiar de pie (reflejar) y adelantarlo un poco (transladar). Si la aplicamos dos veces, nos da una translación (por $2\mathbf{b}$), y si la seguimos aplicando (a ella y a su inversa) nos da un subgrupo de isometrías que son las simetrías de un camino infinito. Pero en fin, hemos demostrado:



Teorema 3.8.1 *Una isometría que invierte orientación es un paso o una reflexión (paso con translación trivial).* □

EJERCICIO 3.98 Con la notación de los parrafos anteriores, demuestra con coordenadas que $(I - E_\theta)\,\mathbf{u}^\perp = 2\mathbf{u}^\perp$. (Tienes que usar las identidades trigonométricas para el doble del ángulo).

EJERCICIO 3.99 Demuestra que si f es una isometría que invierte orientación, entonces $f^2 = f \circ f$ es una translación.

EJERCICIO 3.100 Sea $f(\mathbf{x}) = E_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b}$. Encuentra la expresión para f^{-1} y argumentala geométricamente.

EJERCICIO 3.101 Demuestra analíticamente que la composición de dos reflexiones en lineas paralelas es una translación en la dirección ortogonal a sus espejos.

3.8.3 Homotesias y semejanzas

El clásico "zoom" que aumenta (o disminuye) de tamaño a una figura es lo que llamaremos una *homotesia.* Siempre tiene un centro de expansión, que cuando es el origen resulta ser una transformación lineal con matriz asociada

$$k\,I = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

donde $k > 0$; para $k > 1$ magnifica (es un "zoom" estrictamente hablando) y para $k < 1$ disminuye. Si la componemos con una translación, por $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ digamos, se obtiene una *homotesia* de *factor* k. Su centro de expansión $\mathbf{c}$ es el punto que se queda fijo y que se obtiene entonces resolviendo la ecuación

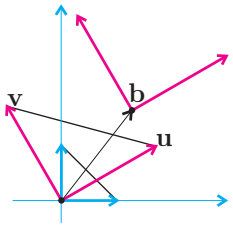
$$k\,\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{x}\,.$$

Una *semejanza* es una transformación afín que preserva ángulos. Claramente las homotesias y las isometrías son semejanzas. Veremos que estas últimas se obtienen simplemente de dejar interactuar a las dos primeras.

Teorema 3.8.2 *Si* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *es una semejanza, entonces existen* $k > 0$, $A \in \mathbf{O}(2)$ *y* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ *tales que*

$$f(\mathbf{x}) = k\,A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Demostración. Consideremos la transformación lineal $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}$, donde $\mathbf{b} := f(\mathbf{0})$, y notemos que preserva ángulos pues las translaciones lo hacen. Sea $B = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ la matriz asociada a g. Como los vectores canónicos son ortogonales entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ (sus imagenes bajo g) también lo son. Ademas tienen la misma norma pues si no fuera asi, los ángulos chiquitos del triángulo $\mathbf{0}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ no medirían $\pi/4$ que son los del triángulo canónico. Sean $k = |\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$ y



$$A = \frac{1}{k}B\,.$$

Se tiene que $A \in \mathbf{O}(2)$ pues sus columnas son ortonormales, y además

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \mathbf{b} = B\mathbf{x} + \mathbf{b} = k\,A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

□

EJERCICIO 3.102 Encuentra la expresión de la homotesia de factor k y centro $\mathbf{c}$.

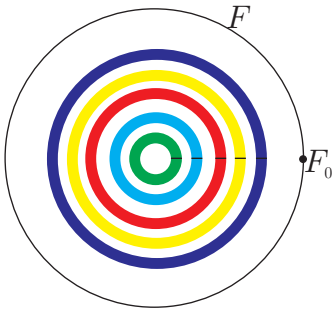
EJERCICIO 3.103 Demuestra que una transformación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una semejanza si y sólo si existe $k > 0$ tal que $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = k\,d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$.

3.9 *Simetría plana

En esta última sección, estudiamos diferentes instancias de simetrías en el plano a manera de aplicaciones de la Teoría que hemos desarrollado.

3.9.1 El Teorema de Leonardo

Ya tenemos la herramienta para demostrar el resultado que habíamos anunciado respecto a los posibles grupos de simetrías de las figuras acotadas. Por una *figura acotada* F entendemos un subconjunto del plano que a su vez esta contenido en el interior de algún círculo; y por medio de una homotesia, podemos suponer que está dibujada en una hoja de papel. ¿Qué podemos decir subre su grupo de simetrías $\mathrm{Sim}(F) = \{f \in \mathbf{Iso}(2) \mid f(F) = F\}$? O bien, ¿Qué grupos son de este tipo? Por ejemplo, si F es un círculo centrado en el origen, entonces $\mathrm{Sim}(F) = \mathbf{O}(2)$, (nótese que un conjunto de anillos concéntricos —un tiro al blanco— tiene a este mismo grupo de simetrías, pero dejémos a F un círculo para fijar ideas). La figura F se genera por un pedacito, un simple punto F_0 (para el tiro al blanco sería un intervalo por cada anillo), juntando todas las copias $f(F_0)$ al correr $f \in \mathbf{O}(2)$ (podríamos escribir $F = \mathbf{O}(2)\ F_0$); es decir dejando que el grupo "barra" o "actue" en una "figura fundamental" F_0. Y como en este caso el grupo es "continuo" (los ángulos de las rotaciones son un continuo) la figura que se genera también es "continua". Podemos pensar que la figura F se obtiene "poniendo tinta" en los puntos de F_0 y luego dejando que el grupo mueva a F_0 y vaya dejando huella. Todas las figuras que tienen simetría se deben obtener así, una porción de ella y el grupo la definen, ... "simetría, se dice coloquialmente, es una relación armoniosa entre las partes y el todo".



Otro ejemplo (antes de considerar a los que ya vimos en la Sección 3) es tomar el grupo generado por una *rotación irracional*. Sea θ es un ángulo para el cuál $n\theta$ (con $n \in \mathbb{Z}$) nunca es múltiplo de 2π, es decir para el que no existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $\theta = (m/n)\,2\pi$ (por ejemplo, $\theta = \sqrt{2}\pi$, o $\theta = 1$ pues π como número ya es irracional[1]). Entonces el conjunto $\langle R_\theta \rangle := \{R_{n\theta} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ es un grupo de rotaciones, para $n = 0$ tenemos a la identidad y la composición de dos claramente está. En este caso, si tomamos un punto $\mathbf{x}$ distinto del origen (en nuestra notación anterior, $F_0 = \{\mathbf{x}\}$) las copias $R_{n\theta}(\mathbf{x})$ van poblando poco a poco (al crecer n en ambos sentidos, si se quiere) el círculo $\mathcal{C}$ con centro en $\mathbf{0}$ y que contiene a $\mathbf{x}$, pues nunca caen sobre un punto ya "pintado", pero nunca llegan a llenar todo el círculo; lo "pueblan", lo "atazcan" pero no lo llenan. Si definimos $F = \{R_{n\theta}(\mathbf{x}) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ entonces $\langle R_{n\theta} \rangle \subset \mathrm{Sim}(F)$ (no nos atrevimos a poner la igualdad pues podría ser que aparescan reflexiones

[1] Un número es *irracional* si no se puede expresar como una fracción p/q con p y q enteros. Por ejemplo $\sqrt{2}$ o π; aunque sea dificil demostrarlo.

como simetrías). Sin embargo, esta "figura" no se le aparecería nunca a un artista (dibujante o vil humano, para el caso) pintando en un papel con lápiz o plumón de cierto grosor. Para eliminar de nuestras consideraciones a este tipo de figuras raras o abstractas, que sólo se le aparecen a un matemático quisquilloso, tendríamos que usar conceptos de "topología de conjuntos" que expresen nuestras nociones intuitivas de "continuidad". Y eso rebaza el alcance de este libro; aunque sí se puede. Lo que sí estamos en posición de hacer es poner restricciones sobre el grupo en vez de sobre la figura. Y entonces demostraremos la versión "grupera" del Teorema de Leonardo.

Teorema 3.9.1 (Leonardo) *Si G es un grupo finito de isometrías del plano entonces G es diédrico o cíclico.*

En su versión "topológica", este Teorema diría algo así como, si F es una figura acotada y "razonable" (que cumple tales condiciones sobre su estructura topológica, "cerrado" por ejemplo) entonces $\mathrm{Sim}(F)$ es diédrico, cíclico o bien $\mathbf{O}(2)$.

Intuitivamente, eso de "cerrado" implica que si sus puntos se acumulan cerca de otro, ese también está, de tal manera que los "huecos" de nuestro ejemplo del grupo generado por una rotación irracional se llenarían y las simetrías crecerían a todas las rotaciones y las reflexiones ($\mathbf{O}(2)$). Pero dejemos ya de lado esta motivación para el estudio de la topología de conjuntos (como controlar particularidades sobre la "continuidad" de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$) y entrémosle a lo que sí podemos hacer: demostrar el Teorema grupero de Leonardo.

La demostración consta de cuatro pasos muy bien diferenciados y con ideas de distinta índole en cada uno.

Paso 1 (El centro de simetría). Como G es un grupo finito, sea $n \geq 1$ su cardinalidad. Entonces podemos enumerar sus elementos como

$$G = \{g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}\}$$

donde no importa el orden, salvo que podemos distinguir a g_0 como la identidad, que sabemos que está en G; y digamos de una vez que a $g_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ también lo llamamos g_n para facilitar la notación. Vamos a demostrar que existe un punto $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ *invariante bajo* G, es decir, tal que $g_i(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ para toda $i = 1, \ldots, n$, que es naturalmente el *centro de simetría* del grupo. Encontrarlo es fácil. Tomamos cualquier punto $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^2$, y $\mathbf{c}$ es el baricentro de su *orbita* ($G\mathbf{x} := \{g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_n(\mathbf{x})\}$). Es decir, sea

$$\mathbf{c} := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right) g_i(\mathbf{x}).$$

(Estamos generalizando la noción de baricentro de un triángulo, 3 puntos, a conjuntos arbitrarios, pero finitos, de puntos). Para ver que $\mathbf{c}$ es invariante bajo G, usamos que las isometrías son funciones afínes y que estas preservan combinaciones afines (Teorema 3.7.1), pues definimos a $\mathbf{c}$ como una combinación tal ($\sum_{i=1}^{n}(1/n) = 1$). Se

tiene entonces que para cualquier $g \in G$ (podemos obviar el subindice para aliviar notación):

$$g(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right) g(g_i(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right) (g \circ g_i)(\mathbf{x})$$

y aseguramos que esta última sumatoria es justo la original (que definió a $\mathbf{c}$) salvo que el orden de los sumandos está permutado. Esto se sigue de que "componer con g" es una biyección del grupo en sí mismo (una permutación de los elementos del grupo). Más formalmente, definamos la función *multiplicación* por g como

$$\begin{aligned} \mu_g &: G \to G \\ \mu_g(g_i) &= g \circ g_i \end{aligned}$$

que está bien definida (que siempre caemos en elementos de G) se sigue de que G es cerrado bajo composición; y para ver que es biyección basta exhibir su inversa: $\mu_{g^{-1}}$, multiplicar por g^{-1} (de nuevo bien definida pues $g^{-1} \in G$). Claramente se tiene que $\mu_{g^{-1}} \circ \mu_g = \mathrm{id}_G$ pues

$$\left(\mu_{g^{-1}} \circ \mu_g\right)(g_i) = \mu_{g^{-1}}\left(\mu_g(g_i)\right) = \mu_{g^{-1}}(g \circ g_i) = g^{-1} \circ g \circ g_i = g_i$$

y analogamente, $\mu_g \circ \mu_{g^{-1}} = \mathrm{id}_G$. Así que la combinación afín que da $g(\mathbf{c})$ es un simple reordenamiento de la que da $\mathbf{c}$ y por lo tanto $g(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ para toda $g \in G$. Hemos demostrado que G tiene centro de simetría y, en particular, que no contiene ni translaciones ni pasos.

Paso 2 (Vámonos al origen) Ahora veremos que podemos suponer que el centro de simetría de G es el origen, y simplificar así nuestras consideraciones subsecuentes, usando nuestro viejo truco de conjugar con la translación de $\mathbf{c}$ al origen. Más formalmente, sea

$$G_{\mathbf{0}} = \tau_{-\mathbf{c}} \circ G \circ \tau_{\mathbf{c}} := \{\tau_{-\mathbf{c}} \circ g \circ \tau_{\mathbf{c}} \mid g \in G\},$$

(el conjunto de los conjugados de todos los elementos de G). Nótese que si $g \in G$ entonces $(\tau_{-\mathbf{c}} \circ g \circ \tau_{\mathbf{c}})(\mathbf{0}) = \tau_{-\mathbf{c}}(g(\tau_{\mathbf{c}}(\mathbf{0}))) = \tau_{-\mathbf{c}}(g(\mathbf{c})) = \tau_{-\mathbf{c}}(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$ asi que $\mathbf{0}$ es el centro de simetr'ia e $G_{\mathbf{0}}$. Es muy fácil ver que $G_{\mathbf{0}}$ también es un grupo y que es *isomorfo* al grupo original G (si G fuera el grupo de simetrías de una figura F, $G_{\mathbf{0}}$ es el grupo de simetrías de $\tau_{-\mathbf{c}}(F)$ —F transladada al origen— y ambas figuras claramente tienen la "misma" simetría), pues la conjugación respeta composición

$$\tau_{-\mathbf{c}} \circ (h \circ g) \circ \tau_{\mathbf{c}} = \tau_{-\mathbf{c}} \circ h \circ (\tau_{\mathbf{c}} \circ \tau_{-\mathbf{c}}) \circ g \circ \tau_{\mathbf{c}} = (\tau_{-\mathbf{c}} \circ h \circ \tau_{\mathbf{c}}) \circ (\tau_{-\mathbf{c}} \circ g \circ \tau_{\mathbf{c}})$$

e inversos $((\tau_{-\mathbf{c}} \circ g \circ \tau_{\mathbf{c}})^{-1} = \tau_{\mathbf{c}}^{-1} \circ g^{-1} \circ \tau_{-\mathbf{c}}^{-1} = \tau_{-\mathbf{c}} \circ g^{-1} \circ \tau_{\mathbf{c}})$. De hecho, la función inversa de la conjugación es la conjugación por la inversa, $G = \tau_{\mathbf{c}} \circ G_{\mathbf{0}} \circ \tau_{-\mathbf{c}}$. Así que si entendemos a $G_{\mathbf{0}}$ (con centro de simetrías $\mathbf{0}$) entenderemos al grupo original

G. Simplificando nuestra notación, suponemos en adelante que G tiene como centro de simetría al origen, que todos sus elementos dejan fijo al $\mathbf{0}$ y por lo tanto que es subgrupo de las transformaciones ortogonales. Es decir, en adelante $G \subset \mathbf{O}(2)$.

Paso 3 (Cuando G preserva orientación). Supongamos que todos los elementos de $G \subset \mathbf{O}(2)$ preservan orientación. Entonces todos los elementos de G son rotaciones con un cierto ángulo θ y tenemos una nueva enumeración natural (no necesariamente la que habíamos usado, salvo la primera) usando sus ángulos:

$$\begin{aligned} G &= \left\{R_{\theta_0}, R_{\theta_1}, R_{\theta_2}, \ldots, R_{\theta_{n-1}}\right\}, \\ \text{donde} \quad 0 &= \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{n-1} < 2\pi \end{aligned}$$

Queremos demostrar que $\theta_1 = 2\pi/n$ y que $\theta_i = i\,\theta_1$, lo cuál es justo decir que $G = \mathbf{C}_n$, que G es el grupo cíclico de orden n generado por la rotación $R_{2\pi/n}$. Consideremos el conjunto de ángulos $\Theta := \{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}\}$. Como G es grupo, la composición de dos elementos de G también está en G, entonces la suma de dos elementos de Θ también está en Θ (*módulo* 2π), esto de "módulo" quiere decir que si $\theta_i + \theta_j \geq 2\pi$ entonces tomamos $(\theta_i + \theta_j) - 2\pi$ como la suma, que los sumamos como ángulos. Pero además, la diferencia de dos elementos de Θ también está en Θ pues G contiene a los inversos.

Con esto ya podemos demostrar que $\theta_2 = 2\theta_1$:

$$\theta_1 < \theta_2 \quad \text{y} \quad 0 < \theta_1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \theta_2 - \theta_1 < \theta_2$$

pero como $(\theta_2 - \theta_1) \in \Theta$ entonces no le queda mas que ser el único elemento entre 0 y θ_2, es decir, $\theta_2 - \theta_1 = \theta_1$. Nos podemos seguir usando el mismo truco (lo que se llama un proceso de inducción) hasta llegar a que $\theta_i = i\,\theta_1$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Para el último paso tomemos $\theta_n := 2\pi$ (como ángulo, $\theta_n = \theta_0$, pero nuestra demostración ha funcionado sobre los números reales), y el mismo argumento (que, para i en general, ha sido

$$\theta_{i-1} < \theta_i \quad \text{y} \quad 0 < \theta_1 \quad \Rightarrow \quad \theta_{i-1} - \theta_1 < \theta_i - \theta_1 < \theta_i$$

que, junto con $(\theta_i - \theta_1) \in \Theta$ y $\theta_{i-2} = \theta_{i-1} - \theta_1$, implica que $\theta_i - \theta_1 = \theta_{i-1}$) nos da que $\theta_n = \theta_{n-1} + \theta_1 = n\,\theta_1$, y por lo tanto que $\theta_1 = 2\pi/n$ para concluir la demostración: si G preserva orientación entonces es cíclico.

Paso 4 (Jaque Mate). Supongamos por último, que algún elemento de G, digamos que f, no preserva orientación. Consideremos al subgrupo de G que sí preserva orientación, llamémosle G^+; es decir, sea

$$G^+ := \{g \in G \mid \det(g) = 1\}.$$

Claramente G^+ es un grupo (contiene a la identidad y tanto el producto como los inversos de transformaciones que preservan orientación preservan orientación) que, por el paso anterior, es un grupo cíclico $\mathbf{C}_m$ para alguna $m < n$ (como hasta ahora, n es el *orden* del grupo G, es decir, $n = \sharp G$).

Primero veámos que $2m = n$. En el Paso 1 definimos la biyección de G "multiplicar por "; veámos qué hace μ_f (multiplicar por nuestro elemento dado que no preserva orientación). Al componer con una transformación que invierte orientación (f en nuestro caso), a una que la preserva ($g \in G^+$) nos da una que la invierte ($\mu_f(g) \notin G^+$) y con una que invierte ($g \notin G^+$) resulta que preserva ($\mu_f(g) \in G^+$); pero podemos resumir este trabalenguas como

$$g \in G^+ \quad \Leftrightarrow \quad \mu_f(g) \notin G^+$$

Esto quiere decir, que μ_f es una biyección entre G^+ y su complemento, G^- digamos —y vale la notación aunque no sea grupo—, de tal manera que ambos tienen el mismo número de elementos, m habíamos dicho, y entonces $n = 2m$.

Por otro lado, como $G \subset \mathbf{O}(\mathbf{2})$, f tiene que ser una reflexión, en la linea ℓ, digamos (y con $\mathbf{0} \in \ell$); y G^+ está generado por la rotación $R_{2\pi/m}$. En el Ejercicio **??** de la Sección **??** se pidió demostrar que $f \circ R_\theta$ es la reflexión en la linea $R_{-\theta/2}(\ell)$ analíticamente; geométricamente, si le aplicamos $f \circ R_\theta$ a está última linea, R_θ la gira a la que está a un ángulo $\theta/2$ más allá de ℓ y luego f la regresa a su lugar, así que es cierto lo que se pidió ($f \circ R_\theta$ es una reflexión que fija a la recta $R_{-\theta/2}(\ell)$, aunque no hayan hecho su tarea). De tal manera que

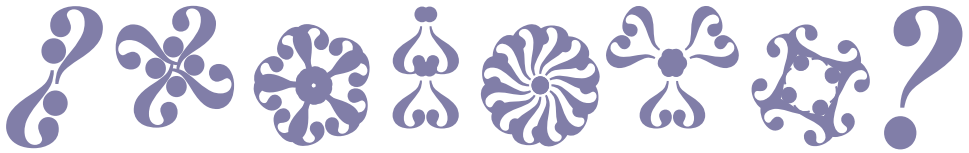
$$f_1 := \mu_f\left(R_{2\pi/m}\right) = f \circ R_{2\pi/m} \in G^-$$

es la reflexión en la recta ℓ_1 cuyo ángulo haciá ℓ es π/m. Por nuestra definición de grupo diédrico, las reflexiones f y f_1 generan a $\mathbf{D}_m$; pero también generan a G y al verlo concluíremos. A saber, $R_{2\pi/m}$ se obtiene como $f \circ f_1$, pues $f = f^{-1}$, así que generan a G^+ (generado por $R_{2\pi/m}$) y luego cualquier elemento de G^- se obtiene como $\mu_f(g) = f \circ g$ para algún $g \in G^+$. Así que $G = \mathbf{D}_m$ y colorín colorado, el Teorema de Leonardo ha quedado demostrado. □

Vale la pena hacer notar de la demostración anterior, que aunque el grupo cíclico quede totalmente definido al fijar su centro de simetría (la $\mathbf{c}$ que encontramos en el Paso 1), o bien que está conjuntistamente determinado como subgrupo de $\mathbf{O}(2)$, no sucede lo mismo para el diédrico, o **los** diédricos para ser más claros. Nótese que nunca usamos el ángulo de la recta ℓ (el espejo básico) en la que se basó (valga la redundancia) el final de la demostración. Para cualquier recta ℓ por el origen funciona la demostración y tenemos una instancia, conjuntistamente distinta, del diédrico. Si queremos **el diédrico** con ℓ igual al eje de las x, tendremos que conjugar, como en el Paso 2, pero ahora con la rotación que lleva a ℓ a la recta canónica.

Quizá quede más claro a qué nos referimos con eso de "instancias" de un cierto grupo si enunciamos el Teorema de Leonardo como "*un grupo finito de isometrías es conjugado del cíclico* $\langle R_{2\pi/n} \rangle$ *o del diédrico* $\langle E_0, E_{\pi/n} \rangle$" que fué, junto con la observación precedente, lo que realmente demostramos.

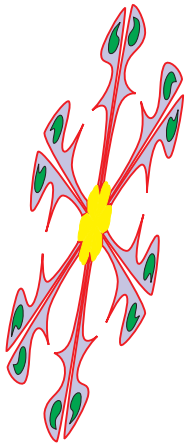
EJERCICIO 3.104 Identifica al grupo de simetrías de las siguientes figuras y, a ojo de buen cubero, píntales su centro de simetría. ¿Qué algunas no tienen tal? ¿Dónde está un error formal de la demostración anterior? Corrígelo.



Leonardo afín

El ojo humano, y la naturaleza en general, identifica simetrías aunque, estrictamente hablando, no las haya; vemos el bulto y no nos preocupamos por los milímetros; el Ejercicio anterior tiene sentido aunque es seguro que en el dibujo, oen la impresión, se cometieron errores; el cuerpo humano tiene simetría $\mathbf{D}_1$. E igualmente existe la simetría más allá del rígido grupo de isometrías.

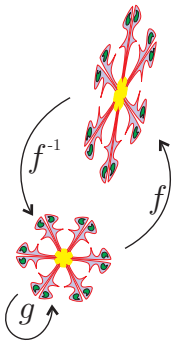
Supongamos que una figura F tiene grupo de simetrías G (será $\mathbf{D}_6$ en la figura que viene). Si f es una transformación afín que no es isometría, entonces $f(F)$ (ahora sí: la figura) ya no tiene, en general y estrictamente hablando, las mismas simetrías (más allá de id y, en su caso, $-\mathrm{id}$). Sin embargo, es evidente que sí las tiene, se las vemos, las detectamos: tiene simetría afín. Podemos definir el *grupo de simetría afín* de (cualquier figura) F (luego regresamos a nuestro ejemplo, $f(F)$) como



$$\mathrm{Sim}_{Af}(F) = \{g \in \mathbf{Af}(2) \mid g(F) = F\}$$

y la demostración de que es un subgrupo de $\mathbf{Af}(2)$, es *verbatim*[2] la de que $\mathrm{Sim}(F)$ es subgrupo de $\mathbf{Iso}(2)$. En nuestro caso ($f(F)$, el dibujito de al lado), $\mathrm{Sim}_{Af}(f(F))$ será justo el conjugado por f^{-1} del grupo $G = \mathrm{Sim}(F)$; que, puesto que f no es isometría, simplemente es afín, sólo es un subgrupo de las transformaciones afines. Veámos. Si $g \in G$ entonces

$$\begin{aligned}\left(f \circ g \circ f^{-1}\right)(f(F)) &= (f \circ g)\left(f^{-1}(f(F))\right)\\ &= (f \circ g)\left(\left(f^{-1} \circ f\right)(F)\right)\\ &= (f \circ g)(F) = f(g(F)) = f(F)\end{aligned}$$



implica que $(f \circ g \circ f^{-1}) \in \mathrm{Sim}_{Af}(f(F))$. Hemos demostrado que

$$f \circ \mathrm{Sim}(F) \circ f^{-1} \subset \mathrm{Sim}_{Af}(f(F))$$

donde estamos extendiendo naturalmente nuestra definición de grupo conjugado (dada en el Paso 2 del Teorema de Leonardo) al contexto más amplio de cualquier grupo (en nuestro caso a $\mathbf{Af}(2)$). Intentémos demostrar la otra contención, pues habíamos aventurado justo la igualdad.

[2] Dícese de cuando es literalmente idéntica, salvo los cambios obvios.

Si $g \in \mathrm{Sim}_{Af}(f(F))$, entonces un cálculo equivalente, aunque más facilito, implica que $(f^{-1} \circ g \circ f)(F) = F$. Pero de esto no podemos concluir que $(f^{-1} \circ g \circ f) \in \mathrm{Sim}(F)$ sino sólo que $(f^{-1} \circ g \circ f) \in \mathrm{Sim}_{Af}(F)$, pues no sabemos si $(f^{-1} \circ g \circ f)$ es isometría o no: en principio, es simplemente afín. Habíamos aventurado la igualdad justa en el caso concreto del dibujito $f(F)$ que estamos estudiando, porque a simple vista es evidente: el "chuequito" $f(F)$ tiene unicamente las 12 simetrías afínes que corresponden a las 12 simetrías métricas del "redondito" F. Y aunque no lo hayamos podido demostrar en el primer intento, surgen las preguntas naturales de si los grupos de simetrías afínes de las figuras acotadas (versión topológica) o si los subgrupos finitos (versión grupera) se comportan como los rígidos (Teoremas de Leonardo). Más concretamente, y en base a lo que hemos logrado con isometrías, olvidándonos de las figuras y concentrándonos en los grupos, nos debemos hacer dos preguntas:

Pregunta 1. *Si G es un subgrupo finito de $\mathbf{Af}(2)$, ¿será cierto que es isomorfo a un cíclico o un diédrico?*

Pregunta 2. *Si G es un subgrupo finito de $\mathbf{Af}(2)$, ¿será cierto que es conjugado del cíclico $\langle R_{2\pi/n} \rangle$ o del diédrico $\langle E_0, E_{\pi/n} \rangle$ para alguna n?*

No queremos perder mucho tiempo en esto, pero vale la pena esbozar algunas ideas básicas hacía la solución (positiva) de estas "conjeturas", pues gran parte del trabajo ya se hizo, y los huecos que quedan motivan el desarrollo de la teoría en capítulos posteriores.

El Paso 1 en la demostración de Leonardo funciona verbatim en el caso afín (de hecho sólo en esa cualidad se basó); y ya que lo mencionamos, ahí está el error que dejamos buscar como ejercicio: para que el centro $\mathbf{c}$ esté bien definido, que no dependa de $\mathbf{x}$, se necesita que el grupo tenga más de dos elementos. Una vez encontrado el centro de simetría (los ejemplos chiquitos son re fáciles), irse al origen (Paso 2) es igualito, pero acabamos suponiendo que G es subgrupo de $\mathbf{Gl}(2)$ en vez de $\mathbf{O}(2)$. Las broncas aparecen en el Paso 3 que aparentemente se basó en sumas, restas y desigualdades de ángulos como números reales, pero en el fondo son una forma más mundana de trabajar con la estructura de grupo. Recapitulémos sobre esa demostración en el contexto afín.

No tenemos los ángulos de las rotaciones. Pero si escogemos un punto distinto del origen que llamaremos $\mathbf{v}_0$, digamos que el canónico $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ para tratar de que la demostración siga a la vieja, tenemos a su órbita

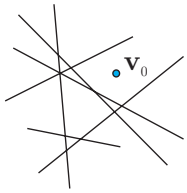
$$G\,\mathbf{v}_0 := \{\mathbf{v}_0 = g_0(\mathbf{v}_0), g_1(\mathbf{v}_0), g_2(\mathbf{v}_0), \ldots, g_{n-1}(\mathbf{v}_0)\} \tag{3.17}$$

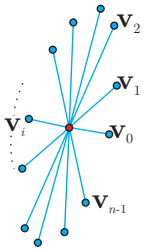
donde seguimos exigiéndo que $g_0 = \mathrm{id}$, y que además quisieramos suponer que está *ordenada angularmente* (que en coordenadas polares sus ángulos son crecientes). Aquí hay una primera bronca: ¿cómo sabemos que no hay repeticiones?, es decir ¿qué hay tantos puntos en la órbita como elementos en el grupo?; y aunque esto fuera cierto ¿cómo sabemos que no hay dos de ellos cuyo ángulo se repite? Una manera de resolver este problema es con los dos primeros ejercicios del siguiente bloque. Pero en el texto

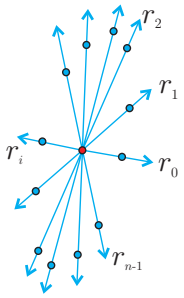
seguiremos otra linea, basicamente, aceptar que a lo mejor escogimos $\mathbf{v}_0 = \mathbf{e}_1$ mal, pero que debe haber otro para el que sí funcione.

Si en la órbita $G\,\mathbf{v}_0$ hubiera una repetición, $g_i(\mathbf{v}_0) = g_j(\mathbf{v}_0)$ digamos, entonces $\mathbf{v}_0$ es punto fijo de un elemento de G, a saber de $g_j^{-1} \circ g_i$, pero cómo G es finito no debe haber demasiados puntos fijos. La idea es encontrar un punto que no sea fijo de ningún elemento de G.

Para cualquier $g \in \mathbf{Gl}(2)$, o bien $g \in \mathbf{Af}(2)$, su conjunto de puntos fijos, cuando $g \neq \mathrm{id}$, es una recta o un sólo punto: ¡hágase el tercer ejercicio que sigue! Entonces, si $G \subset \mathbf{Gl}(2)$ es finito tendremos, a lo más, un conjunto finito de rectas que son puntos fijos de algún elemento de G, y claramente podemos escoger un punto $\mathbf{v}_0$ fuera de todas ellas. Para este $\mathbf{v}_0$, su órbita $G\,\mathbf{v}_0$ (3.17), que consiste de puntos en $\mathbb{R}^2$, está en correspondencia biyectiva con G. Pero ahora, ordenarlos angularmente no nos pone a $\mathbf{v}_0$ necesariamente en el principio (ya no le exigimos que sea $\mathbf{e}_1$ cuyo ángulo es 0); sin embargo, podemos pensar en el *orden cíclico* correspondiente (del último sigue el primero y vuelve a dar la vuelta) y rotar para que queden con $\mathbf{v}_0$ en el primer lugar. Dicho de otra manera, si tomamos los *rayos positivos* generados por $\mathbf{v}_i := g_i(\mathbf{v}_0)$, es decir, sea $r_i := \{t\,\mathbf{v}_i \mid t \in \mathbb{R}, t > 0\}$, entonces estamos suponiendo (u ordenando de tal manera) que girando a r_0 en la orientación positiva, con el primero que choca es r_1, luego r_2 y asi sucesivamente hasta que rebasa a r_{n-1} para regresar a si mismo despues de dar una vuelta.

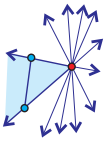


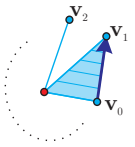




Nótese que en todo el parrafo anterior no hemos usado que G preserve orientación (el Paso 3 en el que andábamos), así que nos podemos seguir en general y ver hasta donde llegamos. Ya tenemos a G linealmente ordenado y con la identidad a la cabeza. Además lo tenemos identificado con puntos en el plano, la órbita $G\,\mathbf{v}_0$, (o bien, con sus rayos r_i), de tal manera que si le aplicamos un elemento de G a un punto de $G\,\mathbf{v}_0$ (o a un rayo) volvemos a caer en $G\,\mathbf{v}_0$ (o, respectivamente, lo manda a otro rayo, pues $g(t\,\mathbf{x}) = t\,g(\mathbf{x})$), pero además si caemos en el mismo es porque aplicamos a la identidad.

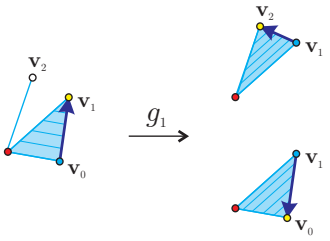
El resto de la demostración se basa en el hecho de que el orden cíclico que tienen los rayos r_i (y, correspondientemente, los puntos o los elementos de G) se define por la relación de "ser vecinos" ($\mathbf{v}_i$ *es vecino* de $\mathbf{v}_{i-1}$ y de $\mathbf{v}_{i+1}$.), y en que esta relación se detecta "linealmente": dos rayos son vecinos si y sólo si el ángulo o sector entre ellos no contiene a otro rayo, es decir, si los segmentos que van de uno a otro no intersectan a ningún otro rayo. (Esto último es cierto para cuando hay muchos rayos, pero los casos pequeños ya debieron resolverse).





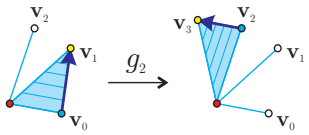
Consideremos el segmento por $\mathbf{v}_0$ y $\mathbf{v}_1$, que no intersecta a ningún rayo r_i; al aplicarle g_1 va a un segmento de $\mathbf{v}_1 = g_1(\mathbf{v}_0)$ a algún $\mathbf{v}_i$, pero este $\mathbf{v}_i$ tiene que ser vecino de $\mathbf{v}_1$ pues los otros segmentos de $\mathbf{v}_1$ a los puntos de la órbita sí

intersectan rayos (aquí se usa que g_1 es afín en las lineas). Tenemos entonces dos casos: $g_1(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$ o bien $g_1(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_0$; pues los vecinos de $\mathbf{v}_1$ son $\mathbf{v}_0$ y $\mathbf{v}_2$. Nótese que los dos casos corresponden respectivamente a que g_1 preserve orientación, pues $\mathbf{v}_2$ está en el lado positivo del rayo r_1; o bien, que la invierta, pues $\mathbf{v}_0$ está en el lado negativo del rayo r_1. En el primer caso ($g_1(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$) se concluye que $g_1^2 = g_2$ (pues $g_1(\mathbf{v}_1) = g_1(g_1(\mathbf{v}_0)) = g_1^2(\mathbf{v}_0)$ y $\mathbf{v}_2 = g_2(\mathbf{v}_0)$) y por inducción (cuyos detalles dejamos al lector) que G es un grupo cíclico de orden n generado por g_1.



En el otro caso, g_1 transpone a $\mathbf{v}_0$ y $\mathbf{v}_1$, pues $g_1(\mathbf{v}_0) = \mathbf{v}_1$ y $g_1(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_0$, de tal manera que $g_1^2 = \mathrm{id}$, pues deja en su lugar a dos vectores linealmente independientes.

Si ahora le aplicamos g_2 al segmento $\overline{\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1}$: manda a $\mathbf{v}_0$ en $\mathbf{v}_2$, pero ya no puede mandar a $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_1$ (la identidad es la única que lo hace) así que tiene que mandar a $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_3$ y tiene que ser una "rotación" (preserva orientación) como en el caso anterior. La demostración de que entonces G es un diédrico sigue verbatim a la que dimos en el Paso 4 de Leonardo usando, respectivamente, a g_2 y g_1 en vez de la rotación y la reflexión que se usaron allá.



Salvo los detalles que mandamos a los ejercicios, hemos respondido la Pregunta 1 afirmativamente; hay un Teorema de Leonardo afín. Aunque ahora, la demostración sólo dió un isomorfismo pero no una conjugación explícita. La Pregunta 2 aún no está resuelta, encontrar una transformación afín que conjugue de golpe a todo el grupo en uno de isometrías requiere de más herramientas; a saber de los "valores y vectores propios" que necesitaremos estudiar en el siguiente capítulo.

EJERCICIO 3.105 Sea $g \in \mathbf{Gl}^+(2)$ (donde $\mathbf{Gl}^+(2) := \{g \in \mathbf{Gl}(2) \mid \det(g) > 0\}$), tal que para algún vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, se tiene que $g(\mathbf{v}) = t\,\mathbf{v}$. Demuestra que si g tiene orden finito, es decir, que si $g^n = \mathrm{id}$ para alguna n, entonces $g = \mathrm{id}$ o $g = -\mathrm{id}$. *(Primero demuestra que $t = \pm 1$ pensando en la acción de g en la recta generada por $\mathbf{v}$, $\langle \mathbf{v} \rangle$; y luego usa la hipótesis de que preserva orientación: toma algún vector fuera de $\langle \mathbf{v} \rangle$ y expresa lo que le hace g).*

EJERCICIO 3.106 Demuestra que si $G \subset \mathbf{Gl}^+(2)$ es finito, entonces $G\mathbf{v} = \{g(\mathbf{v}) \mid g \in G\}$ tiene la cardinalidad de G para cualquier $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Y que además se tiene que si $g(\mathbf{v})$ es paralelo a $h(\mathbf{v})$ para algunos g y h en G entonces $g = h$ o bien $g = -h$ (*ojo: en este último caso, sus ángulos son opuestos*).

EJERCICIO 3.107 Sea $g \in \mathbf{Gl}(2)$, $g \neq \mathrm{id}$, demuestra que su conjunto de puntos fijos, $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}$, es una recta por el origen o sólo el origen (*revisa la Sección 8.1*). Cóncluye que los puntos fijos de una transformación afín distinta de la identidad son el vacio, o un punto o una recta.

EJERCICIO 3.108 Demuestra que $\mathrm{Sim}_{\mathbf{Af}}(\mathbb{S}^1) = \mathbf{O}(\mathbf{2}) = \mathrm{Sim}(\mathbb{S}^1)$; es decir, que toda simetría afín del círculo unitario es una isometría.

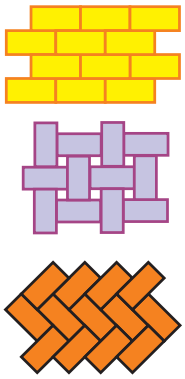
EJERCICIO 3.109 Sea $\mathcal{E}$ la elipse dada por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

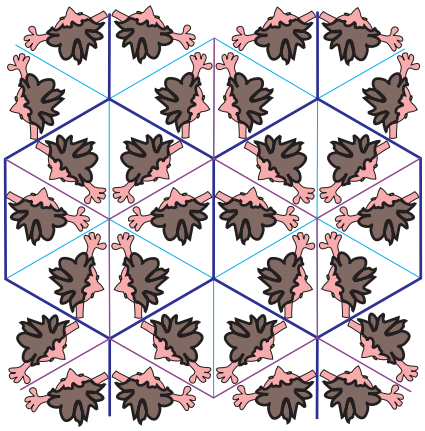
Demuestra que $\mathrm{Sim}_{\mathbf{Af}}(\mathcal{E})$ es conjugado de $\mathbf{O(2)}$ (para esto, encuentra una matriz que mande a $\mathbb{S}^1$ en $\mathcal{E}$).

3.9.2 Grupos discretos y caleidoscópicos

Los Teoremas tipo Leonardo hablan de las posibles simetrías de las figuras acotadas. Pero además hay figuras infinitas que tienen simetría, y de ellas, más bien de sus grupos, queremos hablar en esta sección. Las más comunes son los pisos por los que caminamos a diario y las paredes que nos rodean. Aunque no sean infinitos, una pequeña porción sugiere claramente cómo debía continuarse de tal manera que cada región sea "igualita" a cualquier otra. Tienen, o dan la idea de una "regla" para ir pegando piezas, que llamaremos *lozetas* y que juntas todas ellas llenan el plano. A tal descomposición del plano en lozetas la llamaremos un *mosaico*; cada lozeta es copia isométrica de una o varias que forman el *muestrario*; por ejemplo, en el mosaico de en medio un "ladrillo" rectangular y un "huequito" cuadrado forman el muestrario y en los otros dos el muestrario consta de una sola pieza. Con una sola pieza se pueden armar varios mosaicos (ver otros ejemplos, además de dos al margen, en el segundo ejercicio que viene) usando diferentes "reglas". Y esto de las "reglas" ya lo conocemos, consisten en el fondo de dar un subgrupo de isometrías; que llamaremos el *grupo de simetrías* del mosaico: las isometrías que lo mandan en sí mismo (que dejan a la figura completa —aunque infinita— en su lugar).



Un último y sugestivo ejemplo, antes de entrar a la teoría, surge de los caleidoscopios clásicos que en su versión física, real, consisten de tres espejos rectangulares del mismo tamaño armando un prisma triangular equilatero, de tal manera que al observar desde un extremo de él, la figura plana al otro lado (que puede ser cambiante) se reproduce para dar la impresión de un plano infinito. Este es otro ejemplo de un mosaico plano. Podemos pensar en una figura plana (*la figura fundamental*) dentro de un triángulo equilatero de lineas espejo: esta se reproduce por las tres reflexiones y sus composiciones para tapizar todo el plano y generar una *figura caleidoscópica*; como mosaico, el muestrario consiste de una lozeta que es el triángulo equilatero con un dibujito.



El grupo de simetrías de este mosaico es el conjunto de todas las posibles composiciones de las tres reflexiones básicas o *generadoras*; y un elemento del grupo lleva a la figura (o lozeta) fundamental a una cierta lozeta, que no sólo es un triángulo de la descomposición del plano en triángulos equilateros, sino que la figura (en el dibujo, el "manquito") le dá una orientación y una posición específica. En su versión física, la composición que produce a una cierta lozeta tiene que ver con los espejos y el orden en que rebota el rayo de luz que emana de la figura real para producir la imagen dada.

Basta de ejemplos (ojéense los ejercicios) y hagamos algo de teoría. Por nuestra experiencia reciente, será más facil definir con precisión a los grupos involucrados en los mosaicos que a los mosaicos mismos (se necesitarían rudimentos de topología). Pero la intuición y los ejemplos bastan. Aunque los grupos de simetría de los mosaicos sean infinitos, tienen la propiedad de que localmente son finitos; cada punto del plano está en un número finito de lozetas. Esto se reflejará en la primera propiedad de nuestra definición. Y otra cosa importante es que las lozetas sean acotadas, que expresaremos como la propiedad dos. Llamaremos un *disco* a un círculo (de radio positivo) junto con su interior, es decir a los conjuntos de la forma $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \leq r\}$ para algún punto $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ y algún $r > 0$.

Definición 3.9.1 Un subgrupo G de las isometrías $\mathbf{Iso}(2)$ es *cristalográfico* si cumple:

i) Para cualquier disco D se tiene que el conjunto $\{g \in G \mid g(D) \cap D \neq \varnothing\}$ es finito.

ii) Existe un disco D_0 tal que $\bigcup_{g \in G} g(D_0) = \mathbb{R}^2$, es decir, tal que para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $\mathbf{x} \in g(D_0)$ para alguna $g \in G$.

La primera propiedad dice que al estudiar un grupo cristalográfico dentro de una región acotada del plano sólo intervendrán un número finito de elementos del grupo, a esto también se le llama que el grupo sea *discreto*. Y la segunda, que al entender una región suficientemente grande, pero acotada, de alguna manera ya acabamos; el grupo se encarga del resto.

El nombre "cristalográfico" viene de que los cristales en la naturaleza se reproducen respetando ciertas simetrías; los químicos, interesados en el asunto, se pusieron a estudiar tales simetrías y demostraron, hacia el final del Siglo XIX, que en el plano solamente había 17 posibilidades teóricas para estas reglas de crecimiento. Los matemáticos, ya en el Siglo XX, pulieron sus observaciones y la demostración, pero preservaron el nombre dado por los químicos.

La demostración de este Teorema involucra dos grandes pasos: la existencia (exhibir a los 17 grupos cristalográficos) y la unicidad (demostrar que no hay más). Pero resulta que los artistas y artesanos árabes —cuya expresión gráfica se centró mucho en los mosaicos, la simetría y la ornamentación pues en una cierta interpretación del Corán se prohibía representar a la figura humana— ya habían hecho (¡y de qué manera!) la mitad del trabajo: en la Alhambra, hay ejemplos de mosaicos con los 17 grupos. Así que la demostración de la existencia está en la Alhambra, concluida en

el Siglo XVI; y si hay un Teorema de Leonardo, este —digo yo— debía ser el de la Alhambra.

No nos da el nivel para demostrarlo aquí. Pero sí podemos ejemplificar su demostración con uno mucho más modesto. Diremos que un grupo cristalográfico G es *caleidoscópico* si además cumple que tiene suficientes reflexiones como para generarlo, es decir, si cada elemento de G se puede escribir como composición de reflexiones en G. Un ejemplo es el que describimos arriba, que estaba generado por tres reflexiones y que denotaremos como $K_{3,3,3}$ pues las lineas de sus espejos se encuentran en los ángulos $\pi/3, \pi/3, \pi/3$.

Otros dos grupos caleidoscópicos surgen del juego de escuadras. Con tres lineas espejos en los lados de un triángulo de ángulos $\pi/6, \pi/3, \pi/2$ (la escuadra "$30, 60, 90$") se genera el grupo $K_{2,3,6}$; y con tres espejos en ángulos $\pi/4, \pi/4, \pi/2$ (la escuadra "45") el $K_{2,4,4}$. El último, que llamamos $K_{4\times4}$, es el generado por espejos en los cuatro lados de un rectángulo. Y, salvo ver que efectivamente son cristalográficos, esto concluye la parte de existencia del siguiente:

Teorema 3.9.2 *Hay cuatro grupos caleidoscópicos, que son $K_{2,3,6}$, $K_{2,4,4}$, $K_{3,3,3}$ y $K_{4\times4}$.*

La demostración de la unicidad se basa en un lema general sobre los centros de simetría. Dado un grupo cristalográfico G (aunque de hecho sólo usaremos que es discreto, la propiedad **(i)**) tenemos que para cualquier punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ hay un subgrupo de G, llamado el *estabilizador* de $\mathbf{x}$ y denotado $\mathbf{St}_G(\mathbf{x})$, que consta de los elementos de G que no mueven a $\mathbf{x}$, que lo "estabilizan", es decir,

$$\mathbf{St}_G(\mathbf{x}) := \{g \in G \mid g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}.$$

(es fácil demostrar que efectivamente es un subgrupo de G). Si tomamos cualquier disco D centrado en $\mathbf{x}$, todos los elementos de su estabilizador mandan a D precisamente en D, pues fijan su centro y son isometrías. Por la propiedad **(i)** los que mandan a D cerca (lo suficiente para intersectarlo) ya son un número finito, entonces $\mathbf{St}_G(\mathbf{x})$ es finito para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. El Teorema de Leonardo nos da entonces el siguiente:

Lema 3.9.1 *Si G es un grupo discreto, entonces sus subgrupos estabilizadores no triviales son cíclicos o diédricos.* □

Ahora sí, enfoquémos nuestras baterias contra el Teorema. Como el grupo G tiene suficientes reflexiones para generarlo, nos podemos fijar en el conjunto de sus lineas espejo. Es decir, para cada reflexión en G, pintamos de negro su linea espejo; llamemos $\mathcal{L}$ a este conjunto de lineas. Primero vamos a demostrar que podemos encontrar un triángulo o un rectángulo formado por lineas negras (en $\mathcal{L}$) tal que ninguna linea de $\mathcal{L}$ pasa por su interior y lo llamaremos la *región fundamental*.

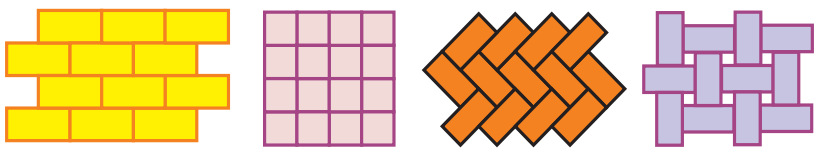
Si todas las lineas de $\mathcal{L}$ son paralelas, los elementos de G mueven a cualquier disco en la dirección perpendicular y entonces cubren a lo más una franja del tamaño de su diametro en esa dirección y no existiría el disco D_0 de la condición **(ii)**. Hay, por tanto, al menos dos pendientes en $\mathcal{L}$. Si son exactamente dos, estas tienen que ser perpendiculares, pues con reflexiones en dos rectas no ortogonales se generan reflexiones en lineas con nuevas direcciones. En este caso, hay al menos dos rectas de cada tipo, pues si hay sólo una de un tipo, con cualquier disco se cubre, de nuevo, a lo más una franja. Existe entonces un rectángulo en $\mathcal{L}$. Si hay rectas en tres direcciones tenemos un triángulo. Llamemos F' al rectángulo o triángulo que hemos encontrado. Puesto que las reflexiones en G que mandan a F' cerquita son finitas (la condición **(i)** aplicada a un disco que lo contenga), hay, a lo más, un número finito de rectas en $\mathcal{L}$ que pasan por el interior de F'. Recortando con tijeras en todas ellas, un pedacito (cualquiera) de lo que queda es la región fundamental F que buscabamos, ya no hay lineas negras por su interior.

Veamos ahora cómo puede ser la región fundamental F. En un vértice, $\mathbf{v}$ digamos, se intersectan dos lineas de $\mathcal{L}$ de tal manera que en su ángulo definido por F (como ángulo interior) no hay ninguna otra linea de $\mathcal{L}$. Como las reflexiones correspondientes a estas dos lineas son elementos del grupo estabilizador de $\mathbf{v}$, $St_G(\mathbf{v})$, y este es diédrico o cíclico según el Lema 3.9.1, entonces es diédrico (pues tiene reflexiones) y el ángulo interior de F en $\mathbf{v}$ es de la forma π/n. Por lo tanto, F tiene que ser un rectángulo (con cuatro ángulos $\pi/2$), o bien un triángulo con ángulos $\pi/p, \pi/q, \pi/r$ donde podemos suponer que $p \leq q \leq r$. En el segundo caso se tiene entonces que p, q, r cumplen

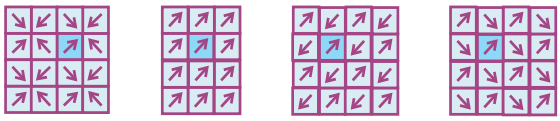
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

pues los ángulos de un triángulo suman π. Para $p = 2$, tenemos las soluciones $q = 3$, $r = 6$ y $q = r = 4$; para $p = 3$ tenemos la solución $q = r = 3$ y para $p \geq 4$ ya no hay soluciones. Entonces hemos demostrado que los lados de F generan uno de los grupos $K_{4\times4}, K_{2,3,6}, K_{2,4,4}$ o $K_{3,3,3}$ (respectivamente a su orden de aparición) y por lo tanto que uno de estos grupos, el correspondiente a F, digamos que G' está contenido en G.

EJERCICIO 3.110 Identifica las *lineas de simetría* (espejos de reflexiones en el grupo de simetrías) y los *centros de simetría* (centros de subgrupos finitos), de los siguientes mosaicos comunes, que, por supuesto, suponemos infinitos.



EJERCICIO 3.111 Supon que en los siguientes mosaicos la lozeta oscura está justo en el cuadrado unitario. Da generadores para sus grupos de simetría.



3.9.3 Fractales afinmente autosimilares

Capítulo 4

Cónicas II (clasificación)

En el Capítulo 2 se introdujeron las cónicas (círculos, elipses, hipérbolas y parábolas) como los lugares geométricos de puntos en el plano euclidiano que cumplen cierta propiedad descrita en términos de distancias. De esa descripción se dedujo que son los conjuntos de puntos cuyas coordenadas cumplen cierta ecuación cuadrática. Una ecuación cuadrática de estas se puede considerar como un polinomio cuadrático (de grado dos) en dos variables (las coordenadas) igualado a 0. Al tomar cónicas en diferentes posiciones y con distintos parametros se obtendrán diversos polinomios. La pregunta que guía este capítulo es la pregunta inversa:

> ¿Será cierto que cualquier polinomio cuadrático en dos variables define una cónica? Si es así, ¿cómo saber qué tipo de cónica es y cuál es su descripción geométrica?

Por su parte, en el Capítulo 3 estudiamos diferentes grupos de transformaciones geométricas. Ellos nos darán la herramienta y el lenguaje para atacar y entender el problema que nos acabamos de plantear.

4.1 ¿Qué es clasificar?

Muy en general, "clasificar" es describir o enumerar las clases de equivalencia de un conjunto de objetos de acuerdo a ciertos "criterios" que definen una relación de equivalencia entre ellos. En nuestro caso, que nos interesan los "objetos geométricos", de lo que depende una "clasificación" es de determinar un conjunto de objetos (triángulos, digamos, como ejemplo para fijar ideas) y de fijar una noción de equivalencia, es decir, definir las condiciones en que estamos dispuestos a decir que son "iguales", o, mejor dicho, equivalentes. En esto último, la noción de grupo de transformaciones que hemos desarrollado es básica. Concretemos.

Una *figura plana* es cualquier subconjunto $F \subset \mathbb{R}^2$. Sea G un grupo de transformaciones de $\mathbb{R}^2$ (nos interesan principalmente los que ya hemos definido, es decir, G

puede ser el grupo afín, $\mathbf{Af}(2)$; el general lineal $\mathbf{Gl}(2)$; el grupo de semejanzas; el de homotesias; el de isometrías $\mathbf{Iso}(\mathbb{R}^2)$; el de transformaciones ortogonales $\mathbf{O}(2)$, o el de translaciones). Decimos que dos figuras F_1 y F_2 son G-*equivalentes* (o bien, que son *equivalentes módulo* G) y lo denotamos $F_1 \overset{G}{\sim} F_2$, si existe $g \in G$ tal que $g(F_1) = F_2$. La terminología se puede hacer a veces más simple; por ejemplo, dos figuras son *semejantes* (o *isométricas*) si son equivalentes módulo semejanzas (o, respectivamente, $\mathbf{Iso}(\mathbb{R}^2)$-equivalentes).

Veamos primero que esta es efectivamente una relación de equivalencia, correspondiendo puntualmente a que G es un grupo de transformaciones:

i) $\overset{G}{\sim}$ es *refexiva* ($F \overset{G}{\sim} F$); pues $\mathrm{id}(F) = F$ y la función identidad, id, está en G.

ii) $\overset{G}{\sim}$ es *simétrica* ($F_1 \overset{G}{\sim} F_2 \Rightarrow F_2 \overset{G}{\sim} F_1$); pues si existe $g \in G$ tal que $g(F_1) = F_2$ entonces $g^{-1}(F_2) = F_1$ y $g^{-1} \in G$.

iii) $\overset{G}{\sim}$ es transitiva ($F_1 \overset{G}{\sim} F_2$ y $F_2 \overset{G}{\sim} F_3 \Rightarrow F_1 \overset{G}{\sim} F_3$); pues si $g_1(F_1) = F_2$ y $g_2(F_2) = F_3$ con $g_1, g_2 \in G$ entonces $(g_2 \circ g_1)(F_1) = F_3$ y $(g_2 \circ g_1) \in G$.

Además, estas relaciones se "anidan" de acuerdo a la contención de grupos; es decir, si $H \subset G$ entonces $F_1 \overset{H}{\sim} F_2 \Rightarrow F_1 \overset{G}{\sim} F_2$. Así, si, por decir algo, dos figuras son isométricas, también serán afinmente equivalentes (pero no necesariamente linealmente equivalentes).

4.1.1 Clasificación de triángulos

Para acabar de entender con un ejemplo concreto, describamos la clasificación de triángulos. Primero hay que definirlos: sea $\mathcal{T}$ el conjunto de triángulos planos, es decir, ternas (no ordenadas) no colineales de puntos en $\mathbb{R}^2$. El Teorema **??** nos dice que "hay un sólo triángulo afín", es decir que cualquier par de triángulos son afinmente equivalentes.

Esta única clase de equivalencia afín se parte en muchas subclases cuando vemos a los triángulos con "ojos de semejanza". Pues si alguna de las seis transformaciones afines que mandan un triángulo en otro es una semejanza entonces estos tienen los mismos ángulos, e inversamente. Así que el Teorema "*dos triángulos son semejantes si y sólo si sus ángulos son iguales*" es un "teorema de clasificcación" que dice que hay una clase de semejanza por cada terna (no ordenada) de ángulos α, β, γ que cumple $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ y $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

De nuevo, las clases de semejanza se parten en clases de isometría de acuerdo a un parametro real y positivo (el tamaño) que podríamos tomar como el área del triángulo o la longitud de un lado dado. Y podríamos de nuevo partir estas clases de isometría en clases módulo translaciones (y aparece un parametro de "orientación" y uno de "dirección"), o bien en clases módulo ortogonales (y aparece un parametro

de "distancia al origen"). Llegando al extremo de la clasificación con el grupo trivial ($\{\mathrm{id}\}$) donde dos son equivalentes si son estrictamente el mismo.

4.2 Clasificación de Cónicas

Primero que nada, un polinomio de segundo grado (o *cuadrático*) en las variables x, y es una expresión

$$P(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

donde los coeficientes a, b, c, d, e, f son números reales, y además al menos uno de a, b, c es distinto de 0 (si no fuera así estaríamos hablando de un polinomio lineal). Los primeros tres términos constituyen su *parte cuadrática,* los siguientes dos su parte *lineal*, y por último f es la parte *constante*. Nótese que al monomio bxy se le considera de grado 2 pues es la suma de los exponentes de las dos variables. A un polinomio cuadrático se le puede pensar también como una función $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde a un punto dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ se le asigna el número $P(\mathbf{x})$ que resulta de sustituir en la expresión los valores de sus coordenadas $\mathbf{x}^\top = (x, y)$. Así que podemos hablar de los *ceros del polinomio* P, o la *curva asociada al polinomio* P, como un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, a saber:

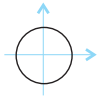
$$\mathcal{C}(P) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | P(\mathbf{x}) = 0\right\}.$$

Diremos que un subconjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ es una *curva cuadrática* si consiste de los ceros de un polinomio cuadrático, es decir, si para algún polinomio cuadrático P se tiene que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(P)$. Por el momento no queremos usar el nombre más común de "cónica", para que quede claro nuestro problema, que consiste en clasificar las curvas cuadráticas de acuerdo a los diferentes grupos geométricos, y en particular, ver si son siempre cónicas. La parte fundamental de esta clasificación consistirá en demostrar que cualquier curva cuadrática es afinmente equivalente a alguna de las siguientes, que por el momento sirven de ejemplos.

4.2.1 Las Cónicas Canónicas (y algo más)

i) El círculo unitario. El polinomio

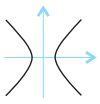
$$x^2 + y^2 - 1 \qquad \text{(i)}$$



tiene como ceros al círculo unitario.

ii) La hipérbola unitaria. El polinomio

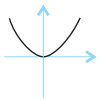
$$x^2 - y^2 - 1 \qquad \text{(ii)}$$



tiene como ceros a la hipérbola que llamaremos unitaria.

iii) La parábola canónica. El polinomio

$$x^2 - y \tag{iii}$$



tiene como ceros a una parábola.

Por medio de transformaciones afines estas tres curvas se pueden mandar a muchas otras. Del círculo unitario se obtienen las elipses, y de la hipérbola y la parábola (que hemos escogido por la simpleza de su polinomio) se obtienen todas las demás hipérbolas y parábolas que estudiamos en el Capítulo 2. Pero notemos de una vez que con los polinomios cuadráticos se obtienen nuevos conjuntos:

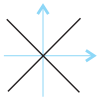
iv) El círculo imaginario. El polinomio

$$x^2 + y^2 + 1 \tag{iv}$$

no tiene ningún cero en los reales pues la suma de dos cuadrados es no negativa, más 1 es estrictamente positiva. Es decir, su curva cuadrática es el vacio $\emptyset \subset \mathbb{R}^2$. La llamamos "círculo imaginario" pues fácilmente le encontramos soluciones complejas (por ejemplo $i^2+0^2+1 = 0$, donde $i^2 = -1$) pero se nos sale del contexto de este libro; aunque como polinomio tiene plenos derechos y tendremos entonces que incluirlo en nuestro análisis.

v) Par de rectas. El polinomio

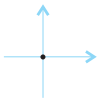
$$x^2 - y^2 \tag{v}$$



tiene como conjunto de ceros a la unión de las dos rectas $x + y = 0$ y $x - y = 0$; pues al verlo como producto ($x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$), si se hace cero entonces alguno de los factores debe ser cero y viceversa.

vi) El círculo de radio cero. Dado por el polinomio

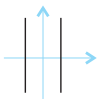
$$x^2 + y^2 \tag{vi}$$



que define al punto **0** por una sola ecuación cuadrática que es el caso limite de círculos cuyo radio se hace cero. Tambien podría llamarse **par de rectas imaginarias** pues se factoriza ($x^2+y^2 = (x+iy)(x-iy)$) se puede ver entonces como dos "rectas complejas" de las que sólo vemos en el plano real al origen.

vii) Rectas paralelas. Por la misma razón que en **(v)**, el polinomio

$$x^2 - 1 \tag{vii}$$



da dos rectas paralelas ($x = 1$ y $x = -1$).

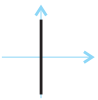
viii) Rectas paralelas imaginarias. Dada por

$$x^2 + 1 \tag{viii}$$

que se factoriza $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$.

ix) Recta doble. Dada por

$$x^2. \qquad \text{(ix)}$$



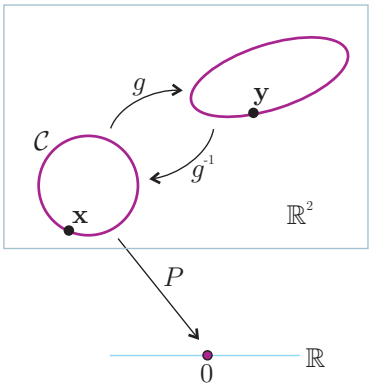
Aunque geométricamente sólo consiste de una recta ($x = 0$) se le llama "recta doble" pues el polinomio que la define es diferente.

4.2.2 Equivalencia de polinomios

Para que tenga sentido el problema de clasificar curvas cuadráticas módulo transformaciones afines, la primera pregunta que debemos responder es si las imágenes afínes de curvas cuadráticas son de nuevo curvas cuadráticas.

Para esto, sean $\mathcal{C}$ una curva cuadrática y $g \in \mathbf{Af}(2)$ una transformación afín. Tenemos entonces que existe un polinomio cuadrático P que define a $\mathcal{C}$, es decir, tal que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(P) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | P(\mathbf{x}) = 0\}$. Afirmamos que

$$g(\mathcal{C}) = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid (P \circ g^{-1})(\mathbf{y}) = 0\right\} \ . \qquad (4.1)$$



Esta igualdad de conjuntos se demuestra por dos contenciones. Primera ($\subset$): cualquier punto en $g(\mathcal{C})$ es de la forma $g(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$; se tiene entonces que $P(\mathbf{x}) = 0$ y por lo tanto

$$(P \circ g^{-1})(g(\mathbf{x})) = P(g^{-1}(g(\mathbf{x}))) = P(\mathbf{x}) = 0,$$

lo cual implica que $g(\mathbf{x})$ está en el conjunto de la derecha.
Y al reves ($\supset$): si tomamos $\mathbf{y}$ tal que $(P \circ g^{-1})(\mathbf{y}) = 0$; sea $\mathbf{x} := g^{-1}(\mathbf{y})$, se tiene entonces que $P(\mathbf{x}) = P(g^{-1}(\mathbf{y})) = 0$ y por tanto que $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ lo cual implica que $\mathbf{y} = g(\mathbf{x}) \in g(\mathcal{C})$. Lo cual demuestra la igualdad.

Obsérvese que en la demostración anterior sólo se uso que $\mathcal{C}$ estuviera definida como los ceros de una función y que g fuera invertible (una transformación). Ahora veremos que $g(\mathcal{C})$ también es curva cuadrática. Para esto bastará ver que si P es un polinomio cuadrático y g una transformación afín entonces la función $(P \circ g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ también es un polinomio cuadrático (para no estar usando g^{-1}, que sólo complica la notación). Puesto que las dos coordenadas de g son polinomios lineales, y una expresión de $P \circ g$ se obtiene al sustituir estos dos polinomios lineales en las variables de P, es claro que (despues de simplificar la expresión) obtendremos un polinomio con monomios de grado a lo más dos. Si los coeficientes de los monomios cuadráticos se cancelaran todos, es decir, si el resultado fuera lineal o constante, tendríamos que al volver a precomponer con g^{-1} se vuelve cuadrático y esto es claramente imposible. Tuvimos que usar entonces que g es transformación. En resumen, hemos demostrado el siguiente lema.

Lema 4.2.1 *Sea $\mathcal{C}$ una curva cuadrática y $g \in \mathbf{Af}(2)$, entonces $g(\mathcal{C})$ también es una curva cuadrática. Además, si $\mathcal{C} = \mathcal{C}(P)$ entonces $g(\mathcal{C}) = \mathcal{C}(P \circ g^{-1})$.* □

Hay que observar, antes de definir la equivalencia de polinomios, que al multiplicar a un polinomio por una constante $k \neq 0$, sus ceros no cambian. Es decir, que $\mathcal{C}(P) = \mathcal{C}(kP)$ cuando $k \neq 0$; pues entonces $P(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow kP(\mathbf{x}) = 0$.

Sea G un subgrupo de $\mathbf{Af}(2)$. Decimos que dos polinomios cuadráticos P_1 y P_2 son *G-equivalentes*, o *equivalentes módulo G*, escrito $P_1 \overset{G}{\sim} P_2$, si existen $g \in G$ y $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, tales que $kP_1 = P_2 \circ g$. Que esta es una relación de equivalencia se deja como ejercicio.

De lo anterior se obtiene que polinomios cuadráticos G-equivalentes definen curvas G-equivalentes. El inverso, aunque es cierto, aún no lo podemos demostrar, pues incluye que si dos polinomios cuadráticos definen la misma curva (tienen los mismos ceros) entonces difieren por una constante y para esto (en general) hay que incluir a los números complejos. Lo que si podemos hacer es enunciar el Teorema fundamental de este capítulo, cuya demostración nos llevará gran parte de él.

Teorema 4.2.1 *Sea P un polinomio cuadrático en dos variables x, y. Entonces P es afinmente equivalente a uno y sólo uno de los polinomios (i), (ii),..., (ix).*

Una vez establecido este teorema, la clasificación afín de curvas cuadráticas será inmediata.

Corolario 4.2.1 *Hay ocho clases de equivalencia afín de curvas cuadráticas que corresponden a los ocho incisos de la Sección 4.2.1.*

Nótese que redujimos a ocho pues el vacio aparece en dos tipos de polinomios.

EJERCICIO 4.1 Demuestra que para un subgrupo G de $\mathbf{Af}(2)$, la relación de ser *G-equivalentes* es una relación de equivalencia en los polinomios cuadráticos en 2 variables.

4.3 Reducción de polinomios cuadráticos

En esta sección veremos como reducir (simplificar) un polinomio cuadrático cualquiera mediante cambios de coordenadas afines. Para empezar, valdrá la pena simplificar la notación de tal polinomio usando el lenguaje matricial y vectorial que hemos desarrollado. A su vez, esto nos dejará ver con nitidez como diferentes tipos de transformaciones afínes afectan al polinomio.

El polinomio general de segundo grado en dos variables se puede siempre escribir como

$$P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f \tag{4.2}$$

donde, la única diferencia con la forma anterior es que le hemos puesto un 2 al coeficiente del término mixto (el monomio en xy) por razones que serán evidentes muy pronto. Si consideramos al vector variable $\mathbf{x}^\top = (x, y)$ y definimos una matriz A y un vector $\mathbf{k}$ como

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

el polinomio P se reescribe como

$$P(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + f \tag{4.3}$$

que llamaremos la *expresión vectorial* de P, pues

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{pmatrix} \\ &= x(ax + by) + y(bx + cy) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \ , \end{aligned}$$

y

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = dx + ey \ .$$

Debe quedar claro entonces que anteponer el 2 al coeficiente mixto fué para que la expresión de la matriz A quede más simple. Así la matriz A, que debemos enfatizar es *simétrica* (es decir, $A = A^\top$), representa a la parte cuadrática, mientras que el vector $\mathbf{k}$ a la parte lineal (la constante f quedo tal cual). Por ejemplo, el polinomio $x^2 + 4xy + 3y^2 + 5x - y + 2$ queda determinado por su parte constante 2, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y el vector} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nuestra definición de *polinomio cuadrático* será ahora una expresión (4.3) con

$$A = A^\top \neq \mathbf{0}.$$

Nótese que al pedirle a la matriz A que sea simétrica obtenemos que la expresión vectorial de P (4.3) es única; se pudo haber tomado cualquier otra mátriz con tal de que sus elementos no diagonales sumaran $2b$ pero la más natural, y que resulta única, es la simétrica y esto será importante. Una de las grandes ventajas de usar la expresión vectorial (4.3) en vez de la expresión en variables (4.2) es que la vectorial se escribe igualito cuando hay más variables, sólo cambian las dimensiones de los elementos, y da la idea clara de que se pueden generalizar nuestros argumentos. Por ejemplo,

para tres variables, tanto el vector varible $\mathbf{x}$ y el constante $\mathbf{k}$ tienen tres entradas, y la matriz A es simétrica de orden 3×3; pero en la expresión en variables faltan cuatro monomios a considerar (ver ejercicio abajo). Sin embargo, esta posibilidad no la usaremos por el momento, seguiremos con dos variables.

Veremos ahora cómo se afecta a la expresión vectorial del polinomio cuadrático P al precomponer con diversas transformaciones afínes, empezando por las más simples.

EJERCICIO 4.2 Encuentra la matriz simétrica A y el vector constante $\mathbf{k}$ que dan la expresión vectorial de los siguientes polinomios cuadráticos

$$x^2 + 2\,y^2 - 6\,x + 4\,y + 3$$
$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 2x - 86y + 39$$
$$2x\,y - 6\,x - 4\,y - 4$$

EJERCICIO 4.3 Da una expresión general para un polinomio cuadrático en tres variables x, y, z y luego define una expresión vectorial para él.

4.3.1 Translaciones (cómo encontrar el centro)

Consideremos la translación $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{h}$, para cualquier vector $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$, y veamos cómo se escribe el polinomio cuadrático $P \circ g$, donde P esta descrito por (4.3) (es decir, donde $P(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + f$.)

$$\begin{aligned}
(P \circ g)(\mathbf{x}) &= P(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = (\mathbf{x}+\mathbf{h}) \cdot A(\mathbf{x}+\mathbf{h}) + \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{h}) + f \\
&= (\mathbf{x}+\mathbf{h}) \cdot (A\mathbf{x} + A\mathbf{h}) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{h} + f \\
&= \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} + \mathbf{x} \cdot A\mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot A\mathbf{x} + \mathbf{h} \cdot A\mathbf{h} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{h} + f \\
&= \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} + \mathbf{x} \cdot A\mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot A\mathbf{x} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{h} \cdot A\mathbf{h} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{h} + f) \\
&= \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} + (\mathbf{x} \cdot A\mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot A\mathbf{x} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + P(\mathbf{h}). \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Nótese que los tres sumandos de enmedio corresponden a la parte lineal, que podemos simplificar aún más usando dos lemas generales.

Lema 4.3.1 *Dadas dos matrices A y B que se puedan multiplicar, se tiene $(AB)^\top = B^\top A^\top$.*

Demostración. Ver ejercicios ?? y ??. □

Lema 4.3.2 *Sea A una matriz simétrica (i.e., $A = A^\top$) entonces para cualquier par de vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ se tiene que $\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.*

Demostración. Puesto que $\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x}^\top A\mathbf{y}$ y el transpuesto de un número real (matriz 1×1) es él mismo, se tiene por el lema anterior que

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} &= \mathbf{x}^\top A\mathbf{y} = (\mathbf{x}^\top A\mathbf{y})^\top = (A\mathbf{y})^\top (\mathbf{x}^\top)^\top \\ &= \mathbf{y}^\top A^\top \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top A\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot A\mathbf{x} = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \ . \end{aligned}$$

□

Por este lema, donde es muy importante que A sea simétrica, podemos simplificar la parte lineal de (4.4) para obtener

$$\mathbf{x} \cdot A\mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot A\mathbf{x} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = 2\,(A\mathbf{h} \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{2}A\mathbf{h} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}$$

de donde concluimos que

$$(P \circ g)(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} + (\mathbf{2}A\mathbf{h} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x} + P(\mathbf{h}).$$

De tal manera que si podemos encontrar $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ que cumpla

$$\mathbf{2}A\mathbf{h} + \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

habremos encontrado una translación que elimine la parte lineal de P. En caso de que tal $\mathbf{h}$ exista, se le llama el *centro* de la curva cuadrática (o de la cónica) asociada a P. En particular, podemos concluir con el siguiente lema.

Lema 4.3.3 *Sea $P(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + f$ un polinomio cuadrático ($A = A^\top \neq \mathbf{0}$) tal que $\det(A) \neq 0$. Entonces si definimos $\mathbf{c} := -(1/2)A^{-1}\mathbf{k}$, se tiene que $\mathbf{c}$ es el centro de $\mathcal{C}\,(P)$ y*

$$P(\mathbf{x} + \mathbf{c}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} + P(\mathbf{c}).$$

□

EJERCICIO 4.4 Demuestra que $(ABC)^\top = C^\top B^\top A^\top$ donde A, B, C son tres matrices que se pueden multiplicar.

EJERCICIO 4.5 Encuentra los centros, si es que tienen, de las curvas asociadas a algunos de los polinomios siguientes

$$x^2 + 2\,y^2 - 6\,x + 4\,y + 3$$
$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 2x - 86y + 39$$
$$x\,y - 3\,x - 2\,y - 2$$
$$-6\,x^2 + 24\,x\,y + y^2 - 12\,x - 26\,y - 161$$
$$9\,x^2 - 4\,x\,y + 6\,y^2 - 58\,x + 24\,y + 59$$
$$x^2 + 2\,x\,y + y^2 + 2\,x + 2\,y - 1$$

4.3.2 Rotaciones (cómo encontrar los ejes)

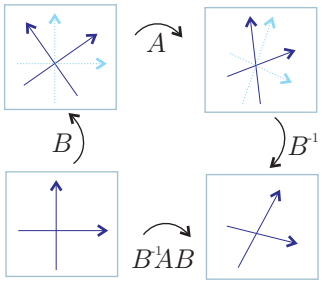
Ya vimos que las translaciones afectan la parte lineal de los polinomios cuadráticos. Consideremos ahora el caso en que g sea una transformación lineal $g(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ (donde $B \in \mathbf{Gl}(2)$). Si P es el polinomio cuadrático general (4.3) entonces

$$\begin{aligned}(P \circ g)(\mathbf{x}) &= P(B\mathbf{x}) = (B\mathbf{x}) \cdot A(B\mathbf{x}) + \mathbf{k} \cdot (B\mathbf{x}) + f \\ &= (B\mathbf{x})^\top A(B\mathbf{x}) + \mathbf{k}^\top B\mathbf{x} + f \\ &= (\mathbf{x}^\top B^\top)A(B\mathbf{x}) + (\mathbf{k}^\top B)\mathbf{x} + f \\ &= \mathbf{x} \cdot (B^\top AB)\mathbf{x} + (B^\top \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x} + f \ . \end{aligned} \tag{4.5}$$

Obsérvese primero que la nueva matriz $B^\top AB$ que define la parte cuadrática sigue siendo simétrica pues $(B^\top AB)^\top = B^\top A^\top \left(B^\top\right)^\top = B^\top AB$, así que la expresión de $P \circ g$ dada arriba es de las buenas. Simplificar la parte cuadrática de P corresponde entonces a encontrar una matriz B tal que $B^\top AB$ sea más simple; por ejemplo *diagonal,* es decir, con ceros fuera de la diagonal, pues entonces el polinomio $P \circ g$ no tendrá término mixto xy. Veremos, como resultado principal de esta sección, que esto siempre se puede lograr.

Hasta aquí sólo hemos usado que B es una matriz (ni siquiera usamos que fuera no singular, con determinante no nulo), pero si le pedimos además que sea ortogonal entonces tenemos que $B^\top = B^{-1}$ y, en este caso, la matriz de la parte cuadrática se transforma en la matriz $B^\top AB = B^{-1}AB$ que tiene un significado geométrico muy claro. Es la matriz que expresa a la función A en la base de las columnas de B. Veámos.

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ las columnas de B, es decir $B = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Si $\mathbf{x}^\top = (x,y)$ entonces $B\mathbf{x} = x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v}$; y podemos pensar a $B\mathbf{x}$ como el vector (con coordenadas repecto a la base canónica) que tiene coordenadas (x, y) en la base $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$. Por el contrario, dado cualquier $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, $B^{-1}\mathbf{y}$ nos da los coeficientes para escribir a $\mathbf{y}$ como combinación de la base $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$, pues es la solución del sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Así que $B^{-1}AB$ es la matriz que describe a A, pensada como función, pero en términos de la base $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$; por ejemplo, $(B^{-1}AB)\,(1,0)^\top = B^{-1}A\left(B\,(1,0)^\top\right) = B^{-1}\,(A\mathbf{u})$ que da, como habíamos quedado, las coordenadas de $A\mathbf{u}$ en la base $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ y los datos que le dimos, $(1,0)$, son las coordenadas de $\mathbf{u}$ en la base $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$. Quizá este razonamiento general no convenza, pero no importa pues en nuestro caso lo podemos concretar aún más.



Supongamos, como es el caso en que estamos interesados, que $B \in \mathbf{O}(2)$, es decir que $BB^\top = I$. Y sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ las columnas de B que forman una base ortonormal. Supongamos además que A actua de manera muy sencilla en $\mathbf{u}$ y en $\mathbf{v}$: que simplemente los alarga por factores λ y μ respectivamente, es decir que $A\mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{u}$ y $A\mathbf{v} = \mu\,\mathbf{v}$. Entonces, expresar a A (como función lineal) pero en términos de la base

B debía ser la matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Veámos si corresponde a $B^\top AB$:

$$\begin{aligned} B^\top AB &= (\mathbf{u},\mathbf{v})^\top A(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^\top \\ \mathbf{v}^\top \end{pmatrix} (A\mathbf{u}, A\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^\top A\mathbf{u} & \mathbf{u}^\top A\mathbf{v} \\ \mathbf{v}^\top A\mathbf{u} & \mathbf{v}^\top A\mathbf{v} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}\cdot A\mathbf{u} & \mathbf{u}\cdot A\mathbf{v} \\ \mathbf{v}\cdot A\mathbf{u} & \mathbf{v}\cdot A\mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}\cdot \lambda\mathbf{u} & \mathbf{u}\cdot \mu\mathbf{v} \\ \mathbf{v}\cdot \lambda\mathbf{u} & \mathbf{v}\cdot \mu\mathbf{v} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) & \mu\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) \\ \lambda\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}) & \mu\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Efectivamente, y con esto nos basta, pues si encontramos una matriz B que satisfaga lo anterior (que "diagonalize" a la matriz A) podremos eliminar el término mixto del polinomio P para acercarnos a los polinomios canónicos.

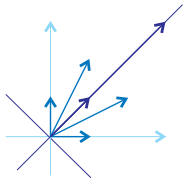
Valores propios y vectores propios

Sea A una matriz cuadrada cualquiera. Se dice que un vector $\mathbf{v}$ es *vector propio* de A con *valor propio* $\lambda \in \mathbb{R}$, si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y se tiene que $A\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$. Nuestro problema será en contrar *parejas propias* (es decir, $\lambda, \mathbf{v}$ valor y vector propio correspondientes). A los vectores propios y valores propios también se les conoce como *eigenvectores* y *eigenvalores* por su nombre en alemán.

Un vector propio de una matriz es un vector donde la matriz (por más complicada que esta sea), como función, actua de una manera muy sencilla, simplemente lo alarga. Nótese además que eliminamos al $\mathbf{0}$ de los posibles vectores propios pues este sería tal para cualquier "valor propio"; sin embargo el 0 ($\in \mathbb{R}$) sí puede ser valor propio si la matriz anula a algún vector no nulo.

Antes de abordar el problema de encontrar vectores propios de manera algebráica, veámos un **ejemplo** sencillo donde geométricamente es fácil encontrarlos. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



Puesto que bajo esta función el eje-x gira hacia arriba y el eje-y hacia la derecha, el cuadrante positivo se apachurra; las lineas en él cercanas al eje-x giran en dirección contraria a las cercanas al eje-y y entonces debe haber una linea que se queda fija. Por simetría (pasa escencialmente lo mismo en los dos extremos) esta linea debe ser la de enmedio; efectivamente, el $(1,1)$ es vector propio de A con valor propio 3. Los otros dos cuadrantes se abren como abánico y de nuevo su linea "media" se queda fija; el vector $(-1,1)$ es vector propio de A con valor propio 1. Entonces, en la base rotada a 45° está transformación es simplemente expander por un factor 3 al primer eje.

Otro ejemplo geometricamente claro son las reflexiones: tienen vectores propios con valor propio 1 en la linea espejo y vectores propios con valor propio -1 en su ortogonal.

Veamos primero un resultado muy general que agrupa naturalmente a los vectores propios.

Lema 4.3.4 *Si* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son vectores propios con el mismo valor propio* $\lambda \in \mathbb{R}$*, entonces cualquier combinación lineal no trivial de ellos también es vector propio.*

Demostración. Si $A\mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{u}$ y $A\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$, entonces para cualquier par de coeficientes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$A(\alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{v}) = \alpha(A\mathbf{u}) + \beta(A\mathbf{v}) = \alpha(\lambda\,\mathbf{u}) + \beta(\lambda\,\mathbf{v}) = \lambda(\alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{v})$$

y entonces, si $\alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, es un vector propio. □

Así que los vectores propios vienen en "paquetes" que son subespacios (líneas por el origen es lo más común) asociados a los valores propios. Los conjuntos de vectores propios asociados a un valor propio se llaman *espacios propios* o *eigenespacios*; en ellos, la matriz actua como una homotesia. Por ejemplo, la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene como espacio propio del valor propio 2 al plano xy y como espacio propio del valor propio 1 al eje z.

Supongamos que $\lambda, \mathbf{v}$ es una pareja propia de la matriz A (en particular $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$), entonces

$$\begin{aligned} & A\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v} \\ \Leftrightarrow \quad & A\mathbf{v} - \lambda\,\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \quad & (A - \lambda\,I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Esta última ecuación nos dice que la transformación $(A - \lambda\,I)$ no es biyectiva pues manda a un vector no cero en el cero. Y como $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, esto último sucede (regresando formalmente al caso de dimensión 2 que sí hemos demostrado, aunque será cierto en general) si y sólo si

$$\det(A - \lambda\,I) = 0\ .$$

Esto demuestra el siguiente Lema.

Lema 4.3.5 *Para cualquier matriz* A *(de* 2×2*):*

$$\lambda \textit{ es un valor propio de } A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0\ .$$

□

Lema 4.3.6 *Si A es simétrica 2×2 entonces tiene dos valores propios λ_1 y λ_2 en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Puesto que A es simétrica, $A = A^\top$, la podemos escribir

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Consideremos ahora a λ como una variable o incógnita y entonces tenemos

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 \\ &= \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac-b^2)\ . \end{aligned}$$

Que resulta ser un polinomio de segundo grado en la variable λ.

Este polinomio es tan importante que tiene nombre: $\det(A-\lambda I)$ es el *polinomio característico* de la matriz A.

Nos interesa, según el Lema anterior, determinar para qué λ's se anula este polinomio, es decir, cuales son sus raices. Para esto apliquemos la fórmula clásica "del chicharronero" que nos da las raices en términos de los coeficientes[1], que en nuestro caso da

$$\begin{aligned} \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)}}{2} &= \frac{(a+c) \pm \sqrt{a^2+2ac+c^2-4ac+4b^2)}}{2} \\ = \frac{(a+c) \pm \sqrt{a^2-2ac+c^2+4b^2)}}{2} &= \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}. \end{aligned}$$

Puesto que $(a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$ por ser la suma de dos cuadrados, entonces la raiz cuadrada es real y $\det(A-\lambda\, I) = 0$ tiene dos soluciones reales, que vienen de tomar $+$ o $-$ en la expresión anterior. Explicitamente, sean

$$\lambda_1 = \frac{(a+c) + \sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}\ ,\ \lambda_2 = \frac{(a+c) - \sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$$

las dos raices; de tal manera que podemos concluir, por el Lema 4.3.5, que λ_1 y λ_2 son valores propios de A y que su polinomio característico se escribe

$$\det(A-\lambda\, I) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2).$$

□

[1] El polinomio ax^2+bx+c tiene como raizes a $(-b \pm \sqrt[2]{b^2-4ac})/2a$.

Obsérvese que en la demostración fué crucial que $A^\top = A$; pues en general este lema no es cierto (ver ejercicios): no toda matriz A de 2×2 tiene valores propios, como no todo polinomio cuadrático en una variable tiene raices reales.

Además, de la demostración podemos concluir (para matrices simétricas) que los dos valores propios coinciden si y solamente si $a = c$ y $b = 0$ (pues se debe tener que $(a-c)^2 + 4b^2 = 0$); es decir, los dos valores propios coinciden si y sólo si la matriz original es la de una homotesia. Tenemos entonces:

Corolario 4.3.1 *Sea A simétrica 2×2 y sean λ_1, λ_2 sus dos valores propios. Entonces, sus valores propios coinciden ($\lambda_1 = \lambda_2$) si y sólo si $A = \lambda_1 I$. Y en este caso, cualquier vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ es vector propio.* □

Corolario 4.3.2 *Sea A simétrica 2×2. Entonces existe una base $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^2$ donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores propios de A.*

Demostración. Por el Lema 4.3.6 sabemos que A tiene dos valores propios λ_1 y λ_2. Si estos fueran iguales, por el corolario anterior cualquier base funciona. Si fueran diferentes ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), entonces por la definición de valor propio existen vectores propios $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ distintos de $\mathbf{0}$ correspondientes a los valores propios λ_1 y λ_2 respectivamente. Estos dos vectores no pueden ser paralelos pues por el Lema 4.3.5 sus valores propios coincidirian. Entonces forman una base de $\mathbb{R}^2$. □

Un ejemplo Vale la pena hacer un ejemplo concreto para fijar ideas. Consideremos la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar sus valores propios hay que resolver su polinomio característico que es

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)(-1-\lambda) - 4 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 6\ . \end{aligned}$$

La fórmula nos dice que sus raices son

$$\lambda_1 = (1 + \sqrt{1+24})/2 = 3 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = (1-5)/2 = -2$$

lo cual implica que

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - 3)(\lambda + 2).$$

Aunque en este caso pudo haber sido resuelto sin usar la fórmula, ya tenemos los dos valores propios. Para encontrar los vectores propios correspondientes, habrá que encontrar una solución no trivial a los sistemas $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Para $\lambda_1 = 3$ tenemos

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2y \\ 2x - 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

y una de sus (multiples) soluciones no triviales es $\mathbf{u}^\top := (2, 1)$. Compruébese directamente que $A\mathbf{u} = 3\mathbf{u}$ como reza la teoria. Para el otro eigenvalor, $\lambda_2 = -2$, el sistema es

$$(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 2y \\ 2x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y una solución no trivial es $\mathbf{v}^\top = (-1, 2)$.

No sólo obtuvimos que los vectores propios $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ forman una base de $\mathbb{R}^2$, sino mucho más: que son ortogonales. Pero esto, como veremos, no es coincidencia.

EJERCICIO 4.6 Demuestra que la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene vectores propios. Da un argumento algebráico y uno geométrico.

EJERCICIO 4.7 Demuestra que la matriz $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ no tiene vectores propios. ¿Puedes dar un argumento geométrico?

Conclusión (diagonalización ortogonal de matrices simétricas)

En nuestro estudio de los vectores propios de las matrices simétricas, saquémosle jugo ahora a lo que ya sabíamos sobre su buen comportamiento respecto al producto interior.

Lema 4.3.7 *Sea A una matriz simétrica. Si $\lambda_1, \mathbf{u}$ y $\lambda_2, \mathbf{v}$ son pares propios tales que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.*

Demostración. Usando el Lema 4.3.2, tenemos

$$\lambda_1(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\lambda_1 \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = A\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot A\,\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda_2 \mathbf{v}) = \lambda_2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

de donde

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = 0\ .$$

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, esto implica que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. □

Podemos entonces concluir.

Teorema 4.3.1 *Sea A una matriz simétrica 2×2. Existe una rotación $B \in \mathbf{O}(2)$ tal que $B^\top AB$ es diagonal, es decir, tal que*

$$B^\top AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

donde λ_1 y λ_2 son los valores propios de A.

Demostración. Por el Lema 4.3.6, A tiene valores propios $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Si $\lambda_1 = \lambda_2$ entonces A ya es diagonal por el Corolario 4.3.1, y B puede tomarse entonces como la identidad. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores propios respectivos. Por el Lema 4.3.7, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales, entonces $\mathbf{v}$ es paralelo a $\mathbf{u}^\perp$; y por el Lema 4.3.4, $\mathbf{u}^\perp$ también es vector propio correspondiente a λ_2. Sea

$$B = \frac{1}{|\mathbf{u}|}\left(\mathbf{u}, \mathbf{u}^\perp\right) \ ;$$

puesto que $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, claramente B es la matriz de una rotación. Y con un cálculo análogo al que hicimos en (4.6) se concluye el Teorema. □

La teoría que hemos desarrollado se resume en una receta muy simple.

Receta para diagonalizar matrices simétricas. El **ingrediente** es una matriz simétrica $A = A^\top$ de 2×2.

El **primer paso** es resolver su polinomio característico $\det(A - \lambda I)$.

Una vez que se conocen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\det(A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$. **Procédase** a encontrar $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ tal que $(A - \lambda_1 I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (esto le resultará muy facil si recuerda las propiedades del compadre ortogonal, basta tomar al compadre ortogonal de un renglón de $(A - \lambda_1 I)$).

Y todo ya está cocinado para **declarar** $B = (1/|\mathbf{u}|)(\mathbf{u}, \mathbf{u}^\perp)$. El resultado será que $B^\top AB$ es la matriz diagonal con entradas λ_1 y λ_2.

EJERCICIO 4.8 Concluye la demostración del Teorema 4.3.1.

EJERCICIO 4.9 Encuentra la matriz B de una rotación que diagonalize las siguientes matrices simétricas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

Cálcula $B^\top AB$, donde A es una de las anteriores y B la rotación correspondiente.

EJERCICIO 4.10 Demuestra que si una matriz A (no necesariamente simétrica) tiene dos valores propios distintos entonces existe una matriz $B \in \mathbf{Gl}(2)$ tal que $B^{-1}AB$ es diagonal.

4.4 Clasificación de curvas cuadráticas

Hemos estudiado como afectan las translaciones y las transformaciones ortogonales a los polinomios cuadráticos, ahora juntaremos nuestros resultados para dar su clasificación isométrica. Pero empezemos con un ejemplo concreto para fijar las ideas, técnicas y resultados que obtuvimos en la sección pasada.

4.4.1 Ejemplo.

Consideremos al polinomio cuadrático

$$P(x,y) = 8\,x^2 + 12\,x\,y + 17\,y^2 - 16\,x - 12\,y - 12$$

y queremos saber qué curva define y dónde está. Para pasarlo a su forma vectorial, $P(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\cdot A\mathbf{x} + \mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + f$, definimos $f = -12$,

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} -16 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es $\det(A) = 8\times 17 - 6\times 6 = 100$ distinto de cero, y por tanto $\mathcal{C}(P)$ tiene centro

$$\mathbf{c} = -A^{-1}\left(\frac{1}{2}\mathbf{k}\right) = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 8\times 17 - 6\times 6 \\ -8\times 6 + 6\times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De tal manera que si transladamos a la curva $\mathcal{C}(P)$ por el vector $(-1,0)$ esta queda definida por el polinomio

$$P_1(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}+\mathbf{c}) = \mathbf{x}\cdot A\mathbf{x} + P(\mathbf{c}) = \mathbf{x}\cdot A\mathbf{x} - 20.$$

Ahora queremos encontrar una rotación B que elimine el término mixto de P_1, y para esto, seguimos la recteta de diagonalización. El polinomio caracteristico de A es

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 8-\lambda & 6 \\ 6 & 17-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 25\,\lambda + 100 = (\lambda - 5)(\lambda - 20)$$

y entonces sus valores propios son $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = 20$. Para el primero de ellos, se tiene que

$$A - 5\,I = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

y podemos tomar como solución del sistema homogéneo que define a $\mathbf{u}^\top = (2, -1)$, de tal manera que una rotación que diagonaliza a A es

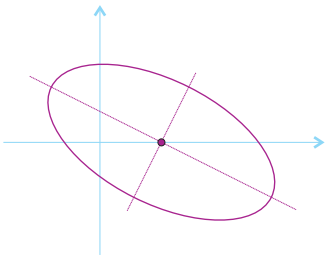
$$B = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B^\top AB = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Podemos concluir, por (4.5), que si rotamos el eje x a la linea con dirección $(2, -1)$ el polinomio P_1 toma la forma

$$P_2(\mathbf{x}) = P_1(B\mathbf{x}) = 5\,x^2 + 20\,y^2 - 20$$

que, finalmente, es equivalente a

$$P_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{5} P_2(\mathbf{x}) = x^2 + 4\,y^2 - 4\,.$$



La curva cuadrática de P_0 es claramente una elipse dada por la ecuación canónica

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

Entonces podemos concluir que $\mathcal{C}(P)$, la que originalmente queríamos describir, es una elipse con centro en $(1, 0)$, eje mayor de tamaño 2 en la dirección del vector $(2, -1)$ y eje menor 1.

Ya que tenemos los numeritos calculados y frescos, prosigamos con el ejemplo hasta su final afín. Si al círculo unitario lo expandemos en el eje-x un factor 2, y luego componemos con la isometría $B\mathbf{x}+\mathbf{c}$ debemos llegar justo a $\mathcal{C}(P)$. La transformación afín que acabamos de describir tiene la fórmula

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y + 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y \end{pmatrix}$$

Puesto que dividimos entre 5 y luego entre 4 para obtener la ecuación canónica de la elipse, debe ser cierto, según la teoría que hemos desarrollado, que

$$(P \circ g)(x, y) = 20\left(x^2 + y^2 - 1\right)$$

EJERCICIO 4.11 Ensuciate las manos y haz con cuidado toda la talacha que compruebe nuestra última aseveración; simplemente hay que sustituir fórmulas, expandir y simplificar. O bien, prográmalo y chécalo en algún paquete matemático adecuado.

4.4.2 Clasificación Isométrica

Consideremos de nuevo al polinomio cuadrático general

$$P(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} + 2\,\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + c$$

con $A = A^\top \neq \mathbf{0}$, y donde, nótese que el vector constante $\mathbf{b}$ que determina la parte lineal es ahora la mitad del que habíamos tomado antes ($\mathbf{k}$) para evitar el $\frac{1}{2}$ que nos aparecia; y que hemos cambiado el nombre a la constante. Y sea

$$g(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{h}$$

una isometría, es decir, $B \in \mathbf{O}(2)$. Al hacer los cálculos como en las secciones precedentes, se obtiene que

$$\begin{aligned} (P \circ g)(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} \cdot \left(B^\top AB\right)\mathbf{x} + 2\,(A\mathbf{h} + \mathbf{b}) \cdot (B\mathbf{x}) + P(\mathbf{h}) \\ &= \mathbf{x} \cdot \left(B^\top AB\right)\mathbf{x} + 2\,B^\top (A\mathbf{h} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x} + P(\mathbf{h}) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Debemos partir nuestro análisis en dos grandes casos de acuerdo al determinante de la matriz A.

Caso 1: $\det(A) \neq 0$**.**

Si escojemos $\mathbf{h}$ como el centro ($\mathbf{h} = -A^{-1}\mathbf{b}$) y B una rotación que diagonalize a A (bien definida salvo el orden y orientación que demos a los vectores propios), entonces P es isométricamente equivalente a un polinomio de la forma

$$P_1(x, y) = \alpha\, x^2 + \beta\, y^2 + \gamma \tag{4.8}$$

donde α y β son los valores propios de A y γ es el valor del polinomio original evaluado en el centro (nótese que sólo estos datos bastan).

Ahora bien, tenemos también que α y β son distintos de cero por el siguiente lema que habíamos postergado.

Lema 4.4.1 *Si A es una matriz simétrica con valores propios α y β entonces*

$$\det(A) = \alpha\,\beta$$

Demostración. Por el Teorema de diagonalización 4.3.1, sea B una rotación que diagonaliza a A. Entonces porque el determinante es multiplicativo se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha\,\beta &= \det\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \det\left(B^\top AB\right) \\ &= \det\left(B^\top\right)\det(A)\det(B) = 1 \times \det(A) \times 1 \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

□

Entonces tenemos naturalmente dos subcasos: cuando $\det(A) > 0$ y los signos de α y β coinciden, o bien cuando son distintos y $\det(A) < 0$.

$\det(A) > 0$: Tenemos tres posibilidades. Primera, si la costante γ es cero (el centro es parte de la "curva" $\mathcal{C}(P)$) entonces la única solución (el único cero de (4.8)) es $(x, y) = (0, 0)$, pues de otra forma es estrictamente del signo de los eigenvalores. Segunda, si la constante γ es del mismo signo que α y β, entonces la curva es vacia pues no hay soluciones (reales, insistámos, pues se le puede llamar "elipse imaginaria"). Y por último, si el signo de γ es el opuesto a los de α y β, los ceros de P_1 (ver (4.8)) claramente coinciden con las soluciones de la ecuación canónica de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $a = \sqrt{-\gamma/\alpha}$ y $b = \sqrt{-\gamma/\beta}$.

$\det(A) < 0$: Solo tenemos dos posibilidades. Si $\gamma = 0$, P_1 es una diferencia de cuadrados que se puede factorizar en la forma

$$(a\,x + b\,y)\,(a\,x - b\,y)$$

donde hemos supuesto que $\alpha > 0$ (y entonces $a = \sqrt{\alpha}$ y $b = \sqrt{-\beta}$), cuya curva consiste en dos rectas cuya intersección es el centro. O bien, si $\gamma \neq 0$ podemos escoger el primer vector propio (correspondiente a la variable x) de tal manera que su valor propio α tenga signo contrario a γ, y entonces los ceros de P_1 corresponden a las soluciones de la ecuación canónica de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $a = \sqrt{-\gamma/\alpha}$ y $b = \sqrt{\gamma/\beta}$.

Caso 2: $\det(A) = 0$**.**

Puesto que no tenemos la seguridad de eliminar la parte lineal, nos conviene simplificar primero a la parte cuadrática (ojo en los ejercicios, esto modifica a la parte lineal). En este caso, por el Lema 4.4.1, uno de los valores propios es cero, y el otro es distinto de cero pues de otra forma, por el Corolario 4.3.1, la matriz A sería la matriz nula que hemos desechado desde el principio. Entonces, podemos diagonalizar (rotar) para que el valor propio correspondiente a x sea el no nulo, y dividiendo entre él obtener que P es isométricamente equivalente a un polinomio de la forma

$$x^2 + 2\,\alpha\,x + \beta\,y + \gamma\ .$$

Este polinomio siempre se puede reescribir como

$$(x + \alpha)^2 + \beta\,y + \left(\gamma - \alpha^2\right),$$

de tal manera que haciendo el cambio de variable isométrico $x' = x + \alpha$, y olvidando la prima, se simplifica a

$$P_2(x, y) = x^2 + a\,y + b\,. \tag{4.9}$$

donde a y b tienen las definiciones obvias. ¿A precomponer con qué translación corresponde este cambio de variable? Y de nuevo tenemos dos subcasos.

$\underline{a = 0}$: Si $b < 0$ entonces el polinomio (4.9) define (y por tanto $\mathcal{C}(P)$ consiste de) dos rectas paralelas. Si $b = 0$, es una recta doble; y si $b > 0$ consiste de "dos rectas imaginarias" (en $\mathbb{R}^2$ es el conjunto vacio).

$\underline{a \neq 0}$: Con una translación en el eje-y, o equivalentemente, el cambio de variable $y' = y + b/a$ y olvidando la prima, obtenemos que P es isométricamente equivalente al polinomio

$$x^2 + a\,y$$

que define una parábola.

En resumen, hemos demostrado que cualquier polinomio cuadrático es isométricamente equivalente a alguno de nueve posibles familias canónicas. Enfatizamos lo de familias, pues nótese que (con isometrías) no podemos deshacernos de ciertos parametros. Por ejemplo y para describir los casos importantes, en las elipses nos quedaron los parametros a y b en la ecuación canónica, que podemos suponer positivos (pues como se usan sus cuadrados el signo da lo mismo) y además podemos suponer que $a \geq b$ (pues al rotar $90°$ se intercambian las variables x y y en la ecuación). De tal manera que, cómo intuitivamente ya sabiamos, hay una clase isométrica de elipses para cada pareja $a \geq b > 0$ (los semiejes major y menor); los casos extremos $a = b > 0$ corresponden a los círculos. En las hipérbolas, no podemos intercambiar las variables (cuyo papel se define respecto a la constante) y tenemos una clase para cada par a, b estrictamente positivo. Por último, las parábolas dependen del parametro $a > 0$ (pues cambiar y por $-y$ es una isometría).

EJERCICIO 4.12 Describe geométricamente (da centro, dirección de los ejes y parámetros o cuación canónica correspondiente) a algunas de las curvas cuadráticas definidas por los polinomios siguientes. Escoge al menos una elipse, una hipérbola y una parábola.

$$-6\,x^2 + 24\,x\,y + y^2 - 12\,x - 26\,y - 161$$
$$9\,x^2 - 4\,x\,y + 6\,y^2 - 58\,x + 24\,y + 59$$
$$x^2 + 2\,x\,y + y^2 + 2\,x + 2\,y - 1$$
$$47\,x^2 + 32\,x\,y - 13\,y^2 - 252\,x - 12\,y + 247$$
$$5\,x^2 + 24\,x\,y - 5\,y^2 + 14\,x - 34\,y - 37$$
$$66\,x^2 - 24\,x\,y + 59\,y^2 - 108\,x - 94\,y + 1$$
$$13\,x^2 + 10\,x\,y + 13\,y^2 + 42\,x - 6\,y - 27$$
$$9\,x^2 + 6\,x\,y + 17\,y^2 + 12\,x - 28\,y - 52$$

$$-7\,x^2 - 12\,x\,y + 2\,y^2 + 40\,x + 20\,y - 55$$
$$9\,x^2 - 24\,x\,y + 16\,y^2 + 130\,x - 90\,y + 175$$
$$18\,x^2 + 48\,x\,y + 32\,y^2 - 29\,x + 3\,y - 22$$
$$32\,x^2 + 48\,x\,y + 18\,y^2 + 31\,x - 8\,y - 88$$
$$-7\,x^2 + 48\,x\,y + 7\,y^2 + 158\,x - 6\,y - 88$$
$$-24\,x^2 - 14\,x\,y + 24\,y^2 + 152\,x - 164\,y + 151$$
$$7\,x^2 + 48\,x\,y - 7\,y^2 + 116\,x - 138\,y - 348$$

EJERCICIO 4.13 Encuentra un polinomio que defina a las siguientes curvas cuadráticas:

a) La elipse con semieje mayor 3 en la dirección $(3,4)$, semieje menor 2 y centro en $(-1,2)$.

b) La hiperbóla con semieje principal 4 en la dirección $(2,1)$, semieje secundario 1 y centro en $(2,3)$.

c) La parábola con vértice en $(1,3)$ directriz en la dirección $(1,4)$ y distancia focal 1.

4.4.3 Clasificación afín y por semejanzas

Para concluir con la clasificación afín que habíamos anunciado al principio de la Sección 2, bastará convertir a los parametros que nos quedan (α's, β's y γ's, o bien a's y b's, en los parrafos anteriores) en 1's o -1's. Y es claro que esto debe lograrse alargando (o encogiendo) adecuadamente en los ejes, y saliéndonos entonces del ámbito de las isometrías. Por ejemplo, en el polinomio de la parábola, $P\,(x,y) = x^2 + ay$ con $a \neq 0$, se obtiene que

$$P\left(x, -\frac{y}{a}\right) = x^2 - y$$

que equivale a precomponer con la expansión de $-a^{-1}$ en el eje y, y que nos da justo el polinomio de la parábola canónica, (iii) en la Sección 2.1. Este es el único polinomio con parte lineal de la clasificación isométrica así que podemos olvidarnos de estos términos.

Si en P_1 (4.8) o en P_2 con $a = 0$, hay término constante no nulo podemos dividir entre él para hacerlo 1. Y nos queda entonces preocuparnos por los términos cuadráticos puros como $\alpha\,x^2$. Obsérvese que si en vez de x, sustituimos la expresión $a\,x$ (una nueva a, cualquier $a \neq 0$), se obtiene $\alpha\ (a\,x)^2 = (\alpha\,a^2)\,x^2$ de tal manera que el coeficiente puede cambiar pero nunca cambiará de signo. En téminos de matrices, si precomponemos a P_2 (4.9) con una transformación lineal que expanda al eje-x por un factor a y al eje-y por b, la matriz de la parte cuadrática resultante será:

$$\text{“}B^\top AB\text{”} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2\alpha & 0 \\ 0 & b^2\beta \end{pmatrix}.$$

Asi que lo que debemos hacer es tomar $a = \left(\sqrt{|\alpha|}\right)^{-1}$ y $b = \left(\sqrt{|\beta|}\right)^{-1}$ para obtener una matriz del tipo

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Con estas observaciones, es fácil ver que los subcasos de la clasificación isométrica dada en la sección anterior corresponden a los incisos y polinomios de la Sección 2.1, completando el teorema de clasificación afín.

Si consideramos por último al grupo de semejanzas, entre las isometrías y las afines, en la matriz "B" última que usamos se debe tener que $a = b$. Entonces sólo podemos lograr que uno de los coeficientes se haga ± 1, y por tanto las elipses (imaginarias o no) y las hipérbolas módulo semejanzas tienen un parámetro que puede ser la razón entre los semiejes o, como habíamos visto en el Capítulo 2, la excentricidad.

EJERCICIO 4.14 ¿Cuál es la matriz de una homotesia que lleve a la parábola dada por $x^2 + ay$, con $a \neq 0$, en la canónica (dada por $x^2 - y$)? Concluye que hay sólo una clase de parábolas módulo semejanzas.

4.5 *Lo que no demostramos

Aunque sí demostramos (detalles más, detalles menos) que cualquier polinomio cuadrático es afinmente equivalente a alguno de los nueve canónicos, no demostramos que estos no son equivalentes entre si. Es decir, que son justo nueve las clases de equivalencia. Un argumento de tipo topológico va como sigue.

Si un polinomio de una elipse fuera equivalente a uno de una hipérbola entonces tenemos una transformacion afín, *afinidad* debíamos llamarla para resumir, que manda a la elipse en la hipérbola. Pero esto no es posible porque la hipérbola parte al plano en tres pedazos (que se llaman las "componentes conexas" de su complemento) y la elipse sólo en dos. Para diferenciar a la elipse de la parábola necesitamos usar otra cualidad, la de acotado funciona pues la elipse lo es mientras que la parábola no. En el fondo estamos usando que las *afinidades* son continuas y que bajo transformaciones continuas estas propiedades se preservan. Para diferenciar a las degeneradas no vacias entre sí, este tipo de argumentos funcionan; y para diferenciarlas con las no degeneradas habrá que usar que estas últimas no contienen rectas y son más que un punto. Sin embargo, con estos argumentos topológicos no podemos diferenciar a los dos polinomios de las curvas vacias, aunque a estos sí de los demás.

Otra cosa que no demostramos es que los polinomios que definen a una misma cónica son únicos salvo constantes no cero. Como veremos, esto tiene que ver con su grupo de simetrías afines. Consideremos el caso más simple; el del círculo unitario $\mathbb{S}^1$

cuya matriz asociada es la identidad, pues está definido por el polinomio

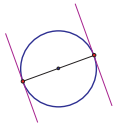
$$P(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - 1 = \mathbf{x}\cdot I\,\mathbf{x} - 1$$

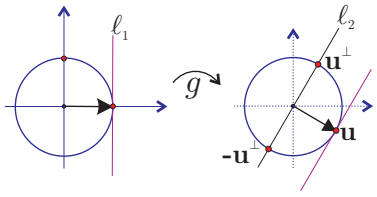
Supongamos que otro polinomio cuadrático P_1 también define al círculo unitario, es decir, que $\mathbb{S}^1 = \mathcal{C}(P_1)$. Queremos demostrar que entonces existe $k \neq 0$ tal que $P_1 = k\,P$. Por el Teorema de Clasificación Afín y el parrafo precedente sabemos que P_1 y P tienen que ser afinmente equivalentes. Entonces existen $g \in \mathbf{Af}(2)$ y $k \neq 0$ tales que

$$P_1 = k\,(P \circ g)\,.$$

Esto implica que g manda biyectivamente a $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$ (arguméntalo). Es decir, que g es una simetría afín del círculo unitario. Ejemplos de este tipo de g's son las transformaciones ortogonales, y ahora demostraremos con argumentos geométricos que son las únicas.

Para ver que g deja fijo al origen (y que entonces es lineal) hay que determinarlo, como centro del círculo, en términos geométricos: es el punto medio de el segmento que une los puntos de contacto de dos tangentes paralelas. Las tangentes son rectas que intersectan al círculo en un único punto; como g manda lineas en lineas, manda entonces tangentes en tangentes. Como ademas g preserva paralelismo y puntos medios, tiene que dejar fijo al centro y por tanto es lineal.





Sea $\mathbf{u} = g(\mathbf{e}_1) \in \mathbb{S}^1$, nos falta demostrar que $g(\mathbf{e}_2) = \pm\mathbf{u}^\perp$. La tangente a $\mathbb{S}^1$ en $\mathbf{e}_1$, ℓ_1 digamos, es la vertical por $\mathbf{e}_1$, que bajo g tiene que ir a la tangente en $\mathbf{u}$, que es la ortogonal al vector $\mathbf{u}$ por el punto $\mathbf{u}$. Entonces, el eje-y (paralelo a ℓ_1 por el centro) va bajo g a la ortogonal a $\mathbf{u}$ por el origen, sea esta ℓ_2. Como $\mathbf{e}_2 \in \mathbb{S}^1 \cap (\text{eje-}y)$, entonces $g(\mathbf{e}_2) \in \mathbb{S}^1 \cap \ell_2 = \{\mathbf{u}^\perp, -\mathbf{u}^\perp\}$, y por lo tanto g es ortogonal y se escribe como $g(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ con $B \in \mathbf{O}(2)$. Tenemos entonces la siguiente igualdad de polinomios

$$\begin{aligned} P_1(\mathbf{x}) &= k\,(P\circ g)(\mathbf{x}) = k\,(P(B\mathbf{x})) \\ &= k\left(\mathbf{x}\cdot\left(B^\top I B\right)\mathbf{x} - \mathbf{1}\right) = k\,(\mathbf{x}\cdot I\mathbf{x} - \mathbf{1}) = k\,P(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

pues $B^\top B = I$, que es lo que queríamos demostrar: *los polinomios cuadráticos que definen al círculo unitario,* $\mathbb{S}^1$, *son exactamente los de la forma*

$$k\left(x^2 + y^2 - 1\right) \quad \text{con} \quad k \neq 0.$$

Con este caso concreto en la mano, es fácil argumentar que para cualquier elipse los polinomios que la definen difieren por constantes no cero. Pero en general, esta linea de argumentación deja mucho que desear. Habría que argumentar geométricamente en cada caso (llevamos uno de nueve) y obtener el grupo de simetrías afines de una cónica (ver ejercicio sobre simetrías de la hipérbola). Algo que resulta imposible para las cónicas vacias, de las que tenemos dos, la degenerada y la no degenerada, que no podemos diferenciar geométricamente.

La linea de argumentación clásica va por otro lado; es algebráica. Pero depende de cerrar algebráicamente a los números reales en los complejos, y ahí si funciona. Si dos polinomios tienen los mismos ceros, entonces salvo constantes, son potencias de un mismo polinomio, y esto podría considerarse como el principio de la geometría algebráica moderna. Rebasa el contexto de este libro.

EJERCICIO 4.15 Demuestra que el conjunto de afinidades que dejan invariante a un polinomio cuadrático P,

$$\mathrm{Sim}_{Af}(P) = \{g \in \mathbf{Af}(2) \mid P \circ g = P\}$$

es un grupo.

EJERCICIO 4.16 Para $P(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{1}$ demuestra algebráicamente que $\mathrm{Sim}_{Af}(P) = \mathbf{O}(2)$.

EJERCICIO 4.17 Sea $\mathcal{H}$ la hipérbola canónica dada por la ecuación $x^2 - y^2 = 1$. Demuestra que para cualquier $(a, b) \in \mathcal{H}$ se tiene que la transformación lineal definida por la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

deja invariante a (es una simetría afín de) $\mathcal{H}$.

*EJERCICIO 4.18 Demuestra que si $g \in \mathbf{Af}(2)$ es tal que $g(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ (con $\mathcal{H}$ la hipérbola canónica) entonces g es lineal y está dada por una matriz como la anterior, o bien por esa seguida de la reflexión en el eje-x.

* EJERCICIO 4.19 Demuestra que dos polinomios que definen a la hipérbola canónica difieren por una constante ($P_1 = k\,P_2$).

Capítulo 5

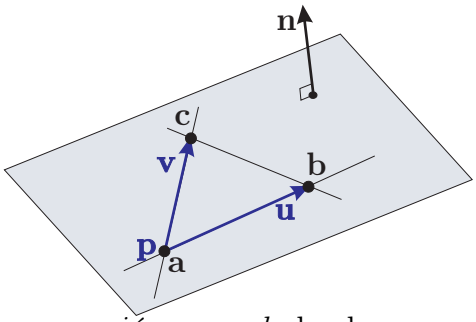
La Esfera y el Espacio

En este capítulo estudiaremos la geometría de la esfera. Veremos cómo se puede hacer, y hay, geometría en otros "espacios" además del plano euclidiano. Pero antes tenemos que repazar y ver ciertas propiedades de su "habitat" natural, del espacio ambiente en el que vive.

5.1 Planos en $\mathbb{R}^3$

Hemos visto que los planos en $\mathbb{R}^3$ se pueden definir de, al menos, tres maneras. Una, su *descripción paramétrica*, es dando un punto base $\mathbf{p}$ y dos vectores direccionales $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, no paralelos, para describir a un plano Π con dos parametros libres s y t como

$$\Pi = \{\, \mathbf{p} + s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{v} \mid s, t \in \mathbb{R} \,\}.$$



Otra, su *descripción baricéntrica*, es dando tres puntos $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ en él, no colineales, y describirlo por coordenadas baricéntricas (o combinaciones afines):

$$\Pi = \{\, \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\,;\, \alpha + \beta + \gamma = 1 \,\}.$$

Y finalmente, una descripción *intrínseca*, por medio de una *ecuación normal*, dando un vector normal $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ y una constante $d \in \mathbb{R}$

$$\Pi : \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d$$

Pasar de una descripción baricéntrica a una paramétrica, y viceversa, es fácil pues tomando $\mathbf{a} = \mathbf{p}, \mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{u}$ y $\mathbf{c} = \mathbf{p} + \mathbf{v}$ por ejemplo, podemos transformar una en la otra (Sección 1.??). El primer problema importante que vamos a atacar es cómo encontrar una ecuación normal para un plano dado paramétricamente. Es decir, dados $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, no paralelos, encontrar un vector $\mathbf{n}$ perpendicular a ambos. Pero antes, veámos con un ejemplo cómo es fácil encontrar una descripción paramétrica, o baricéntrica, de un plano dado por una ecuación normal.

Tomemos por ejemplo la ecuación

$$2x + y - z = 2$$

que define un plano Π normal al vector $(2, 1, -1)$. Para encontrar una descripción baricéntrica basta encontrar tres soluciones particulares no colineales. Y para esto, podemos asignar valores arbitrarios a dos de las variables y despejar la tercera. Lo más fácil es hacerlas cero. Así, si hacemos $y = 0$ y $z = 0$ la ecuación implica que $x = 1$ y por tanto que $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$ es una solución. Análogamente, $\mathbf{b} = (0, 2, 0)$ y $\mathbf{c} = (0, 0, -2)$ son soluciones. Y estos tres puntos nos dan una descripción baricéntrica del mismo plano pues son los puntos de intersección de Π con los tres ejes y en este caso no son colineales.

Para obtener una descripción paramétrica, podemos tomar a $\mathbf{a}$ como punto base y a $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ y $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ como vectores direccionales:

$$\begin{aligned} \Pi &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 - s - t \\ 2s \\ -2t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Y efectivamente, estos valores siempre satisfacen la ecuación original; para corroborarlo, podemos sustituir en la ecuación original y ver que simbólicamente, es decir, independientemente de los valores de los parámetros, siempre se cumple:

$$2\,(1 - s - t) + (2s) - (-2t) = 2$$

Hay que observar que a veces puede ser un poco, pero no mucho, más difícil encontrar soluciones particulares no colineales (veánse los siguientes ejercicios).

Por último, es bonito ver lo fácil que resulta demostrar porque el método que acabamos de esbozar funciona siempre.

Lema 5.1.1 *Si* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *son soluciones de la ecuación lineal* $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d$*, entonces cualquier combinación afín de ellos también lo es.*

Demostración. Recordemos que una combinación afín de $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ es un vector que se expresa de la forma

$$\alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c} \qquad \text{con} \qquad \alpha + \beta + \gamma = 1$$

De la linearidad del producto interior, la hipótesis y esta última ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c}) &= \alpha\ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) + \beta\ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) + \gamma\ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{c}) \\ &= \alpha\,d + \beta\,d + \gamma\,d \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)\ d = d \end{aligned}$$

□

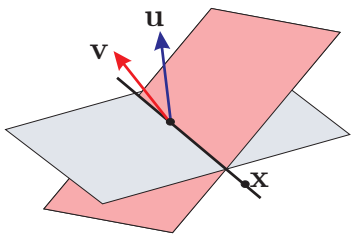
EJERCICIO 5.1 Encuentra descripciones baricéntricas y paramétricas para los siguientes planos: $\Pi_1 : 2x - 3y + z = 6$; $\Pi_2 : x + 4y - 2z = 4$; $\Pi_3 : -x + y - 2z = 2$; $\Pi_4 : 5x - 2y + z = 1$.

EJERCICIO 5.2 Enuncia y demuestra el Lema anterior para combinaciones afínes de longitud arbitraria (no necesariamente de tres vectores) y en cualquier espacio vectorial.

5.2 El producto cruz

Consideremos ahora el problema inverso: encontrar una ecuación normal para un plano descrito paramétricamente. Puesto que sabemos pasar de una descripción baricéntrica a una paramétrica y viceversa, el problema se reduce a encontrar un vector perpendicular a dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dados. Es decir, tenemos que resolver el sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} &= 0 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} &= 0 \end{aligned}$$



o bien, encontrar un punto $\mathbf{x}$ en la intersección de los planos ortogonales a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$. Tenemos siempre a la solución *trivial* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, pero esa no nos sirve pues el vector normal a un plano debe ser distinto de cero. De tal manera que si encontramos $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ que satisfaga las dos ecuaciones anteriores entonces el plano que pasa por $\mathbf{p}$ con vectores direccionales $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tendrá la ecuación normal

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$$

Además, resolvamos de una buena vez el problema de manera general, tratando de no hacer suposiciones extras sobre los vectores dados.

Démosle coordenadas a nuestros vectores usando subindices, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ para que el sistema se escriba

$$\begin{aligned} u_1\, x + u_2\, y + u_3\, z &= 0 \\ v_1\, x + v_2\, y + v_3\, z &= 0 \end{aligned}$$

con $\mathbf{x} = (x, y, z)$ cómo nuestro vector variable o incógnita. Para eliminar una de las variables, podemos usar el mismo método que en sistemas de 2×2. Eliminémos z multiplicando la segunda ecuación por u_3, la primera por $-v_3$ y sumando para obtener

$$(u_3 v_1 - v_3 u_1)\; x + (u_3 v_2 - v_3 u_2)\; y = 0$$

Esta ecuación ya la conocemos aunque con otros nombres para las constantes (recuérdese nuestro primer encuentro con el compadre ortogonal). Tiene una solución canónica "volteando" los coeficientes y a uno de ellos también el signo, es decir:

$$x = u_2v_3 - v_2u_3 \ ; \ y = u_3v_1 - v_3u_1$$

Sustituyendo ahora estos valores en la primera ecuación y simplificando se obtiene

$$\begin{aligned} u_1 \ (u_2v_3 - v_2u_3) + u_2 \ (u_3v_1 - v_3u_1) + u_3 \, z &= 0 \\ u_3 \, (u_2v_1 - v_2u_1 + z) &= 0 \end{aligned}$$

que, independientemente del valor de u_3, tiene la solución

$$z = u_1v_2 - v_1u_2 \, .$$

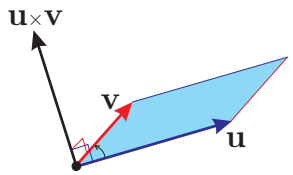
La solución particular que acabamos de encontrar (y que siempre funciona pues nunca dividimos ni hicimos ninguna suposición sobre si los coeficientes son cero o no) es tan importante que tiene nombre establecido. Se llama el *producto cruz* de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Y para resumir, remarcar, y establecer su notación, definámoslo como el vector

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_2v_3 - v_2u_3 \\ u_3v_1 - v_3u_1 \\ u_1v_2 - v_1u_2 \end{pmatrix} \, . \tag{5.1}$$

La fórmula parece complicada, pero la "cantaleta" que nos ayuda a recordarla la hace sencilla. Obsérvese que en la primera coordenada del producto cruz no aparecen las primeras coordenadas de los ingredientes: es justo el determinante de la matriz 2×2 que se obtiene al eliminar el primer renglón de la matriz 3×2 de los dos vectores. La segunda coordenada es de nuevo el determinante eliminando ahora al segundo renglón, pero con signo negativo. Y la tercera vuelve a ser el determinante tal cual al olvidarse del tercer renglón. El producto cruz se arma de subdeterminantes 2×2 olvidando datos (coordenadas) correspondientes y teniendo cuidado de los signos (el de enmedio lleva un menos).

Geometricamente, el producto cruz es a $\mathbb{R}^3$ lo que el compadre ortogonal es a $\mathbb{R}^2$. En el plano, dado un vector $\mathbf{u}$, se puede escoger un vector canónico ortogonal a él girándolo $90°$ en la orientación positiva; ese es su compadre ortogonal $\mathbf{u}^\perp$ que tanto nos ha ayudado; nótese que $\mathbf{u}^\perp$ está en la media recta de vectores ortogonales a $\mathbf{u}$ que está a "su izquierda" y que tiene la magnitud de $\mathbf{u}$.

En $\mathbb{R}^3$ no es posible escoger para un vector $\mathbf{u}$ un ortogonal de manera coherente, pues $\mathbf{u}$ tiene todo un plano de ortogonales y es imposible decidir cuál de ellos es "el bueno". Pero para dos vectores, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, sí se puede elegir al "bueno" de manera geométrica: si generan un plano, tenemos que escoger un vector en su recta ortogonal. Primero escogemos el lado de ese plano donde el giro de $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ se ve contra las manesillas del reloj (positivo). Esto nos da media recta de sus posibles ortogonales. Y de estos, escogemos al que tiene magnitud igual al área del paralelogramo que generan $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Así obtenemos un ortogonal a ellos, escogido canónicamente, y que es precisamente su producto cruz, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, como veremos más adelante. Obsérvese además que la *construcción geométrica* del producto cruz que acabamos de esbosar funciona también cuando $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no generan un plano, pues entonces están en una línea por el origen, el área de su paralelogramo es cero, y les toca entonces el vector $\mathbf{0}$. Así que el producto cruz también debe detectar si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente dependientes.



Hemos hecho muchas afirmaciones que ahora debemos demostrar. Empezemos por las propiedades elementales del producto cruz respecto a las otras operaciones que ya conocemos.

Teorema 5.2.1 *Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ tres vectores cualesquiera y $t \in \mathbb{R}$. Se cumplen entonces las siguientes propiedades del producto cruz:*

$$
\begin{aligned}
&\textbf{\textit{i)}} && (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0 \\
&\textbf{\textit{ii)}} && \mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u} \\
&\textbf{\textit{iii)}} && \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \\
&\textbf{\textit{iv)}} && \mathbf{u} \times (t\,\mathbf{v}) = t\ (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\
&\textbf{\textit{v)}} && (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \\
&\textbf{\textit{vi)}} && (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\ \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\ \mathbf{u} \\
&\textbf{\textit{vii)}} && |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \operatorname{sen} \theta
\end{aligned}
$$

donde θ (entre 0 y π) es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

Demostración. La propiedad **(i)** es justo la motivación que usamos para definir el producto cruz (que es ortogonal a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$). La propiedad **(ii)** se conoce como *antisimetría*, las variables no conmutan sino que *aticonmutan*. Las propiedades **(iii)** y **(iv)** son la *linearidad* del producto cruz, que junto con **(ii)** dan que tambien es lineal en la primera variable; se dice que es *bilineal*. Todas ellas se siguen directamente de la definición (5.1) y se las dejamos como ejercicio al lector.

El inciso **(v)** es igualmente fácil pero es tan importante que preferimos darle un pequeño espacio. Al desarrolar ambos lados (según las definiciones de los productos cruz e interior) se obtiene una suma de monomios de la forma $\pm u_i v_j w_k$ con $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. A saber, siguiendo el orden de $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ y la correspondiente fórmula (5.1)

para $(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$, tenemos

$$\begin{aligned} & u_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2 (v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1) \\ = \; & u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2 - (u_1 v_3 w_2 + u_2 v_1 w_3 + u_3 v_2 w_1) \end{aligned}$$

que son todas las posibles permutaciones de los tres índices. Nótese que las que tienen signo positivo son las tres que preservan el orden cíclico $1 \to 2 \to 3 \to 1$ y las que tienen menos son las tres que lo invierten. Para concluir **(v)** basta ver que al desarrollar $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ se obtienen de nuevo los seis posibles monomios y con los mismos signos, aunque en diferente orden. Esta función de tres vectores es el *determinante* y la estudiaremos con detalle más adelante.

La razón geométrica de **(vi)** es que cualquier vector ortogonal a $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ está contenido en el plano que generan $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, y por tanto se expresa en términos de ellos. Pero que los coeficientes sean tan nítidos es agradable. Para demostrarlo hay que desarrollar

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - v_2 u_3 \\ u_3 v_1 - v_3 u_1 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

Hagamos con cuidado la primera coordenada; las otras dos son análogas y se dejan al lector. Aplicando de nuevo la fórmula del producto cruz se tiene que la primera coordenada es

$$\begin{aligned} & (u_3 v_1 - v_3 u_1)\, w_3 - w_2\, (u_1 v_2 - v_1 u_2) \\ = \; & (u_3 w_3 + u_2 w_2)\, v_1 - (v_3 w_3 + v_2 w_2)\, u_1 \\ = \; & (u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3)\, v_1 - (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)\, u_1 \\ = \; & (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\, v_1 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\, u_1 \end{aligned}$$

que claramente es la primera coordenada de $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\, \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\, \mathbf{u}$.

Observémos, antes de entrarle a **(vii)**, que de aquí se sigue que el producto cruz **no es asociativo** (más que un "producto algebráico" es un "producto geométrico"). Usando la antisimetría, **(ii)**, y la fórmula para un doble producto, **(vi)**, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= -(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} \\ &= -((\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\, \mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\, \mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\, \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\, \mathbf{w} \end{aligned}$$

que no tiene porque ser igual a $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$.

Para demostrar **(vii)** desarrollemos $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2$ usando en las dos primeras igualdades

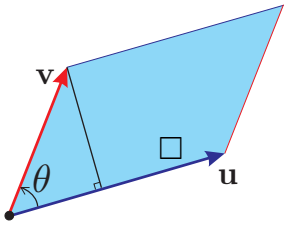
a **(v)** y a la fórmula que acabamos de ver respectivamente:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= \mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}))\\ &= \mathbf{u}\cdot((\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{u}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{v})\\ &= (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2\\ &= |\mathbf{v}|^2\,|\mathbf{u}|^2-|\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2\cos^2\theta\\ &= |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2\left(1-\cos^2\theta\right)=|\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\end{aligned}$$

De donde se sigue **(vii)** pues todos los factores son positivos. □

Corolario 5.2.1 *La magnitud de* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *es el área del paralelogramo generado por* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$.

Demostración. Si tomamos a $\mathbf{u}$ como base del paralelogramo entonces su altura es $|\mathbf{v}|\,\mathrm{sen}\,\theta$; y el corolario se sigue de **(vii)**.



Corolario 5.2.2 *Los vectores* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son paralelos si y sólo si su producto cruz,* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, *es igual a* $\mathbf{0}$.

Demostración. Se sigue de **(vii)**, pues $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ (no nulos) son paralelos si y sólo el ángulo θ entre ellos es 0 o π, y esto sucede si y sólo si $\mathrm{sen}\,\theta=0$. □

Nótese además que si $\mathbf{u}$ o $\mathbf{v}$ son el vector cero, entonces su producto cruz también es cero. Por lo tanto tenemos que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ generan un plano si y sólo si su producto cruz es distinto de cero, y en este caso $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es normal a ese plano.

EJERCICIO 5.3 Encuentra una ecuación normal para los siguientes planos:

$\Pi_1=\{(2+t-s\,,\,1-2t+s\,,\,3t-s-3)\mid t,s\in\mathbb{R}\}$

$\Pi_2=\{(\alpha+\beta-2\gamma\,,\,2\alpha-2\beta+\gamma\,,\,3\alpha+\beta-\gamma)\mid \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\,;\ \alpha+\beta+\gamma=1\}$

$\Pi_3=\{(2\alpha+\beta-\gamma\,,\,\alpha-3\beta+\gamma\,,\,\alpha-\beta+\gamma)\mid \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\,;\ \alpha+\beta+\gamma=1\}$

$\Pi_4=\{(3+2t+s\,,\,2s-t\,,\,t+5s-3)\mid t,s\in\mathbb{R}\}$

EJERCICIO 5.4 ¿Cuáles de las siguientes cuartetas de puntos en $\mathbb{R}^3$ son coplanares? Y si lo son define al plano en el que están.

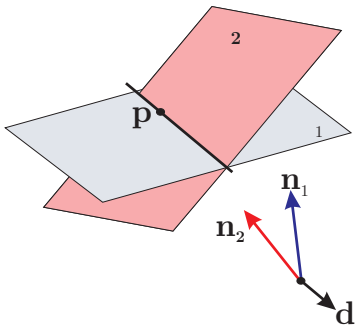
a) $\mathbf{a}=(2,-1,0)\,,\mathbf{b}=(1,2,-2)\,,\mathbf{c}=(0,1,0)\,,\mathbf{d}=(4,-1,-1)\,.$

b) $\mathbf{a}=(2,-1,0)\,,\mathbf{b}=(1,2,-2)\,,\mathbf{c}=(0,1,0)\,,\mathbf{d}=(3,-1,-1)\,.$

EJERCICIO 5.5 Encuentra un criterio general para saber si cuatro puntos $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\in\mathbb{R}^3$ son coplanares o no, y demuéstralo.

5.2.1 Intersección de planos

Consideremos dos planos dados por una ecuación normal



$$\begin{aligned} \Pi_1 &: \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x} = d_1 \\ \Pi_2 &: \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x} = d_2 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Supongamos que sus dos vectores normales no son paralelos. Entonces el vector $\mathbf{d} := \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ es no nulo por el Corolario 5.2.2. Esta es la única "dirección común" a los dos planos, pues es normal a los dos vectores normales; de tal manera que la recta donde se intersectan debe tener esa dirección. Supongamos que $\mathbf{p}$ es una solución particular al sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas anterior, es decir, que $\mathbf{p}$ es un punto en la intersección: $\mathbf{p} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$. Vamos a demostrar que entonces la recta

$$\ell = \{\mathbf{p} + t\,\mathbf{d} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

es precisamente la intersección.

Primero veamos que un punto en ℓ satisface las ecuaciones (5.2). Para $i = 1, 2$ se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{p} + t\,\mathbf{d}) &= \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{p} + \mathbf{n}_i \cdot (t\,\mathbf{d}) \\ &= \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{p} + t\ (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{d}) = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{p} = d_i \end{aligned}$$

pues $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{d} = 0$ por definición de $\mathbf{d}$. Lo que demuestra que $\ell \subset \Pi_1 \cap \Pi_2$. Y por el otro lado, si $\mathbf{q} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$ probaremos que $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ es paralelo a $\mathbf{d}$, para lo cual usamos el criterio del Corolario 5.2.2 y el Teorema 5.2.1:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \times (\mathbf{q} - \mathbf{p}) &= \mathbf{d} \times \mathbf{q} - \mathbf{d} \times \mathbf{p} \\ &= (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \times \mathbf{q} - (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \times \mathbf{p} \\ &= (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{q})\,\mathbf{n}_2 - (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{q})\,\mathbf{n}_1 - (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{p})\,\mathbf{n}_2 + (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{p})\,\mathbf{n}_1 \\ &= d_1\,\mathbf{n}_2 - d_2\,\mathbf{n}_1 - d_1\,\mathbf{n}_2 + d_2\,\mathbf{n}_1 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Hemos completado la parte central de la demostración del siguiente.

Teorema 5.2.2 *Dos planos en $\mathbb{R}^3$ se intersectan en una recta si y solo si sus vectores normales no son paralelos. En caso contrario, o no se intersectan (son* paralelos*) o son el mismo plano.*

Demostración. Nos falta nadamás afinar detalles. Primero, suponiendo que los vectores normales no son paralelos, tenemos que ver que existe una solución particular $\mathbf{p}$ como la que usamos arriba; y segundo, observar que cuando son paralelos, que

exista o no esta solución particular determina los dos casos correspondientes. Para esto, consideremos al sistema (5.2) en coordenadas:

$$\begin{aligned} a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z &= d_1 \\ a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z &= d_2 \end{aligned}$$

Para encontrar una solución particular podemos asignar un valor arbitrario a cualquiera de las variables y resolver el sistema 2×2 que queda. Lo más fácil es hacerla 0; por ejemplo si $z = 0$ tenemos un sistema 2×2 clásico (en x y y) que tiene solución única dependiendo de su determinante. Puesto que las coordenadas del producto cruz son precisamente ($\pm$) estos determinantes, que los vectores normales no sean paralelos implica que alguno de los tres subsistemas 2×2 que se obtienen al hacer una variable 0 tiene determinante no nulo y por tanto solución. En el caso en que son paralelos los vectores normales entonces los lados izquierdos son múltiplos: si las constantes lo son por el mismo factor definen al mismo plano, pero si no lo son no existen soluciones comunes. □

Asi que las rectas en $\mathbb{R}^3$ se pueden determinar por dos ecuaciones lineales o bien describirse paramétricamente.

EJERCICIO 5.6 Encuentra una descripción paramétrica para la recta de intersección de las siguientes parejas de planos:

$\Pi_1 : 2x + y - z = 1; \quad \Pi_2 : -2x + y - 3z = 3.$
$\Pi_1 : x - y - z = 0; \quad \Pi_2 : x + y - z = 1.$
$\Pi_1 : 2x + y - z = 2; \quad \Pi_2 : -x + y - 2z = 2.$
$\Pi_1 : 2x + z = 1; \quad \Pi_2 : -2x + z = 3.$

EJERCICIO 5.7 Describe las siguientes rectas *intrínsecamente*, es decir, como las soluciones de dos ecuaciones lineales:

$\ell_1 = \{(2 + t\,,\, 1 - 2t\,,\, 3t - 3) \mid t \in \mathbb{R}\}$
$\ell_2 = \{(s\,,\, 2 - 3s\,,\, 2s - 3) \mid s \in \mathbb{R}\}\,.$

EJERCICIO 5.8 Sea Π el plano dado por la ecuación $\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} = c$ y sea ℓ la recta $\{\mathbf{p} + t\,\mathbf{d} \mid t \in \mathbb{R}\}$. Demuestra (sustituyendo la expresión de los puntos de ℓ en la ecuación de Π) que Π y ℓ se intersectan en un único punto si y sólo si $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \neq 0$. Observa que si no es así (es decir, si $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} = 0$) entonces la dirección $\mathbf{d}$ es paralela al plano; por tanto demostraste que un plano y una recta se intersectan en un único punto si y sólo si la direccion de la recta no es paralela al plano.

EJERCICIO 5.9 Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ tres vectores tales que $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \neq 0$. Demuestra que tres planos normales a $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ respectivamente se intersectan en un único punto.

5.2.2 El determinante y orientación

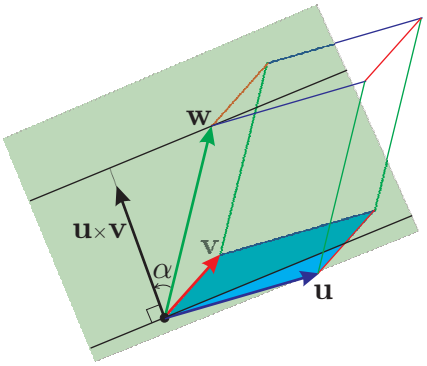
Dados tres vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, definimos su *determinante* como el número real

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \\ &= (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} \\ &= (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde hemos usado la propiedad **(v)** del producto cruz y la simetría del producto punto. El determinante tiene el siguiente significado geométrico.

Proposicion 5.2.1 *Dados tres vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, su determinante es el volumen signado del paralelepipedo que definen; donde el signo corresponde a su "orientación".*

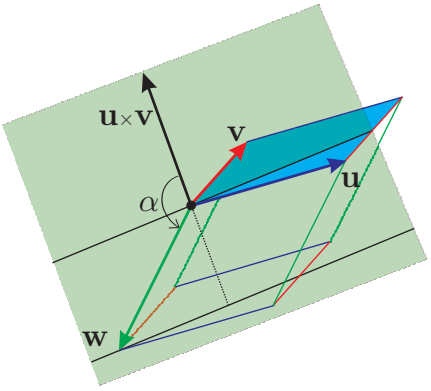
Demostración. Consideremos la fórmula $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$. Sabemos que $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ es el área del paralelogramo $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ que podemos tomar como base del paralelepipedo en cuestión. Y por la fórmula geométrica del producto punto tenemos entonces que



$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \ |\mathbf{w}| \cos\alpha$$

donde α es el ángulo entre $\mathbf{w}$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

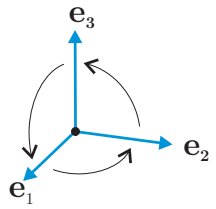
Supongamos primero que $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Entonces, en el plano generado por $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ (en el que el plano $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ –generado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, recuérdese– se ve como la linea perpendicular a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$), es fácil ver que la altura del paralelepipedo es $|\mathbf{w}| \cos\alpha$ y se sigue el resultado: tenemos que $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ es "base por altura". Si $\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$ entonces $|\mathbf{w}| \cos\alpha$ es también esa altura pero con signo negativo. Corresponde a que $\mathbf{w}$ vive en el otro lado del plano $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ en el que está $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Pero en valor absoluto, $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ sigue siendo el volumen del paralelepipedo que definen $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.



□

El producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ "escoge" un lado *positivo* del plano $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$; los vectores $\mathbf{w}$ que están en ese lado (un *semiespacio*) ven el giro de $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ en contra de las manesillas del reloj (la orientación positiva del plano $\mathbb{R}^2$). El lado positivo corresponde, por convención, a la regla de la mano derecha. Es decir, si con la punta de los dedos de la mano derecha simulamos el giro de $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, entonces el pulgar apunta hacia el lado positivo del plano, hacia $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Para los vectores $\mathbf{w}$ que estan en el otro lado, el *negativo*, decimos que la terna $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ induce la *orientación negativa* a $\mathbb{R}^3$.

Así, por ejemplo, la terna canónica $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ tiene orientación positiva, pero la terna $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ tiene orientación negativa. De tal manera que si, por convención, ponemos las coordenadas de la pantalla de una computadora con el eje x ($\mathbf{e}_1$) horizontal a la derecha (como se lee), y el segundo eje (y o el vector $\mathbf{e}_2$) hacia arriba; entonces el lado positivo del eje z (o el tercer vector canónico $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$) apunta hacia nosotros.



Podemos concluir con una regla geométrica para saber si tres vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ en nuestro espacio tienen orientación positiva o negativa (la regla algebráica, abstracta, es simplemente computar el signo de $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$). Gírese de $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ con los dedos de la mano derecha; si el pulgar apunta cerca de $\mathbf{w}$, su orientación es positiva, y si de plano apunta hacia el otro lado es negativa; pues, por convención, insistimos, los vectores canónicos se situan conforme a esta regla.

Proposicion 5.2.2 *Sean* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *dos vectores que generan un plano* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ *en* $\mathbb{R}^3$. *Entonces* $\mathbf{w}$ *está en el plano* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ *si y sólo si* $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$.

Demostración. Por el Corolario 5.2.2 tenemos que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Entonces el plano definido por la ecuación $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{x} = 0$ es precisamente el plano generado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, y se sigue la proposición, pues $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$. □

En términos de la Proposición anterior, $\mathbf{w}$ está en el plano $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ si y sólo si el volumen del paralelepipedo definido por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ es cero.

EJERCICIO 5.10 Demuestra que el determinante cumple las siguientes propiedades

i) $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = -\det(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u})$
ii) $\det(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$
iii) $\det(t\,\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = t\,\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$
iv) $\det(\mathbf{u} + \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \det(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$

EJERCICIO 5.11 Demuestra, usando unicamente el Ejercicio anterior, que el determinante no cambia si sumamos un multiplo de un vector a alguno de los otros, es decir, que

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v} + t\,\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

5.2.3 Sistemas de ecuaciones

Aplicaremos ahora el producto cruz a la resolución de sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Como vimos en el Capítulo 3, tal sistema se puede escribir como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

donde A es una matriz de 3×3, $\mathbf{x}$ es el vector variable, o de las incógnitas (x, y, z), y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ es un vector constante. Si denotamos por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ a las columnas de A (es decir, si $A = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$) entonces es natural definir el *determinante de la matriz* A como

$$\det A = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

y tenemos:

Teorema 5.2.3 *El sistema* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tiene solución única si y sólo si* $\det A \neq 0$.

Demostración. Con la notación del parrafo anterior ($A = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, $\mathbf{x} = (x, y, z)^\top$), el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es equivalente a la ecuación vectorial

$$x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v} + z\,\mathbf{w} = \mathbf{b}$$

Tomando el producto punto con el producto cruz de dos de los vectores se eliminan las dos variables correspondientes. Así, para eliminar a x y a y tomamos el producto punto con $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ para obtener la ecuación

$$z\,((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{b}$$

pues $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ es ortogonal a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$. De aquí, si $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det A \neq 0$, se tiene que

$$z = \frac{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{b}}{\det A}$$

Y análogamente, por (5.3), $\det A \neq 0$ implica que

$$y = \frac{(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{b}}{\det A} \quad , \quad x = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{b}}{\det A}$$

Por lo tanto, si $\det A \neq 0$ entonces la solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es única y esta dada por las ecuaciones anteriores que son conocidas como "la regla de Krammer".

Ahora tenemos que demostrar el inverso, supongamos entonces que $\det A = 0$ y hay que ver que el sistema no tiene solución única. Expresemos el determinante como $\det A = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$. Si $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ entonces por el Corolario 5.2.2 tenemos que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos, y si $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \neq 0$ entonces por la Proposición 5.2.2, tenemos que $\mathbf{w} \in \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. En ambos casos podemos afirmar que existen números r_0, s_0 y t_0 con alguno de ellos distinto de cero que cumplen

$$r_0\,\mathbf{u} + s_0\,\mathbf{v} + t_0\,\mathbf{w} = \mathbf{0}, \tag{5.4}$$

pues en el primer caso ($\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$) tenemos una igualdad $\mathbf{u} = s\,\mathbf{v}$ o $\mathbf{v} = r\,\mathbf{u}$, y en el segundo ($\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq 0$) podemos expresar $\mathbf{w} = r\,\mathbf{u} + s\,\mathbf{v}$; y de cualquiera de estas igualdades obtenemos una expresión (5.4) con alguno de los coeficientes igual a 1 al

pasar a todos los sumandos al lado izquierdo. Esto implica que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ no tiene solución única pues encontramos una diferente de la *trivial* que es $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (los tres coeficientes cero). Resumiendo, si suponemos que $\det A = 0$, hemos demostrado que existe $\mathbf{x}_0 = (r_0, s_0, t_0) \neq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Esta será la base para demostrar que para cualquier $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ la solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no es única:

Si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución (el caso, por ejemplo, en el que $\mathbf{w}$ está en el plano generado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ pero $\mathbf{b}$ no está en ese plano) entonces, en particular, **no** hay solución única. Pero si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sí tiene solución, digamos que $\mathbf{x}_1$ es tal que $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$ entonces

$$A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$$

y como $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0$ pues $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ entonces la solución **no** es única. Dicho de otra manera, si existen r, s y t tales que

$$r\,\mathbf{u} + s\,\mathbf{v} + t\,\mathbf{w} = \mathbf{b}$$

entonces también se cumple que

$$(r + r_0)\ \mathbf{u} + (s + s_0)\ \mathbf{v} + (t + t_0)\ \mathbf{w} = \mathbf{b}$$

Lo cual concluye la demostración del Teorema pues que no haya solución única quiere decir que o bien no hay solución o si sí la hay, entonces hay muchas (en el fondo hemos demostrado que hay tantas como para la homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$). □

EJERCICIO 5.12 Sea $A = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ una matriz de 3×3 con $\det A \neq 0$. Demuestra que entonces tiene matriz inversa A^{-1} y que esta está dada por la fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} (\mathbf{v} \times \mathbf{w})^\top \\ (\mathbf{w} \times \mathbf{u})^\top \\ (\mathbf{u} \times \mathbf{v})^\top \end{pmatrix}$$

donde, recuerda, $\mathbf{x}^\top$ es el vector renglón transpuesto del vector columna $\mathbf{x}$.

5.2.4 Dependencia e independencia lineal

En la demostración del regreso (si $\det A = 0$, la solución no es única) del Teorema anterior hubo un paso fundamental que amerita comentarios y profundización. El de encontrar una solución no trivial a la ecuación homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, porque es la manera más democrática y general de decir que las columnas de la matriz A no son tan generales como podrían ser; que en vez de generar a todo $\mathbb{R}^3$ sólo generan a un plano o una linea o al origen (si las tres son $\mathbf{0}$). Amerita una pomposa definición que funciona en general, aunque en este libro sólo se le dé uso en instancias pequeñas ($k \leq 4$ y $n \leq 3$).

Definición 5.2.1 Sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Se dice que son *linealmente independientes* si

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$$

es decir, si la única combinación lineal de ellos que da el vector $\mathbf{0}$ es la *trivial*. Y si, por el contrario, existen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ no todas ellas cero, tales que $\lambda_1 \, \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \, \mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_k \, \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$ entonces se dice que son *linealmente dependientes.*

Así se tiene que un vector es linealmente dependiente si y sólo si es el vector $\mathbf{0}$, que dos vectores no $\mathbf{0}$ son linealmente dependientes si y sólo si son paralelos y que tres vectores son linealmente dependientes si y sólo si los tres están en un mismo plano por el origen; que son los casos que nos interesan y que han quedado debida y elegantemente incluidos en una sola definición. Podemos refrasear entonces que el paso fundamental de la demostración anterior fué ver que $\det A = 0$ si y sólo si las columnas de A son linealmente dependientes.

A manera de resumen, enlistemos una serie de equivalencias, cuya demostración o bien ya dimos o bien falta sólo algun argumento sencillo que dejamos como ejercicio mental para el lector.

Teorema 5.2.4 *Sea $A = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ una matriz 3×3, y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ su función lineal asociada (es decir, definida por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Entonces son equivalentes:Sea Π el plano dado por la ecuación $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c$ y sea ℓ la recta $\{\mathbf{p} + t\,\mathbf{d} \mid t \in \mathbb{R}\}$. Demuestra que Π y ℓ se intersectan en un único punto si y sólo si $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \neq 0$. Observa que si no es así (es decir, si $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} = 0$) en*

- ***i)*** $\det \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$
- ***ii)*** $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *son linealmente independientes*
- ***iii)*** *el sistema* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *tiene solución única para alguna* $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$
- ***iv)*** *el sistema* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *tiene solución única para toda* $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$
- ***v)*** $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{R}^3$ *(i.e.,* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *generan* $\mathbf{R}^3$)
- ***vi)*** $\mathbf{f}$ *es inyectiva*
- ***vii)*** $\mathbf{f}$ *es suprayectiva*
- ***viii)*** $\mathbf{f}$ *es biyectiva*

EJERCICIO 5.13 Demuestra que tres planos en $\mathbb{R}^3$ se intersectan en un único punto si y sólo si sus tres vectores normales son linealmente independientes.

EJERCICIO 5.14 Sean $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ linealmente independientes, y sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas cualesquiera con direcciones $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$ respectivamente. Demuestra que existe una única recta ℓ_3 con dirección $\mathbf{d}_3$ que pasa por ℓ_1 y ℓ_2.

5.3 La Esfera

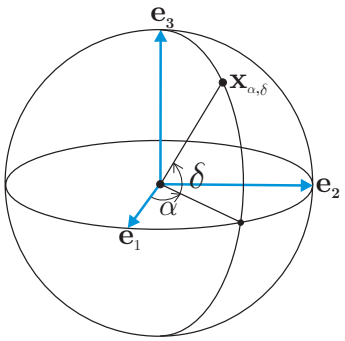
Ahora sí, estudiaremos algo de la geometría de la *esfera*:

$$\mathbb{S}^2 := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| = 1 \right\},$$

es decir, el conjunto de todos los vectores *unitarios* (de norma 1) en $\mathbb{R}^3$. No está de más remarcar que es la frontera de la "*bola sólida*" $\mathbb{B}^3 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq 1\}$ y que si bien está última tiene tres dimensiones, su frontera, la esfera, tiene sólo dos. Intrinsecamente es una superficie y su símil más parecido en el mundo real son las pompas de jabón.

Por su parte es la representante teórica de cosas importantes como la superficie de la tierra o el firmamento. Siguiendo este símil, podemos dar dos coordenadas angulares para sus puntos. El *ecuador* consta de los puntos

$$\{(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha, 0) \mid \alpha \in [0, 2\pi]\}$$



donde α es llamada la *latitud*, y se identifica naturalmente con el círculo unitario $\mathbb{S}^1$. Y luego, para una latitud α dada podemos variar la *altitud* $\delta \in [-\pi, \pi]$ para obtener el punto

$$\mathbf{x}_{\alpha,\delta} = (\cos\delta\cos\alpha, \cos\delta\operatorname{sen}\alpha, \operatorname{sen}\delta)$$

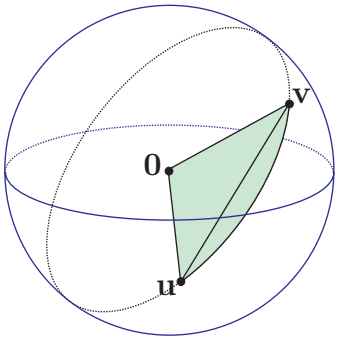
que efectivamente está en la esfera pues

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_{\alpha,\delta}|^2 &= (\cos\delta\cos\alpha)^2 + (\cos\delta\operatorname{sen}\alpha)^2 + \operatorname{sen}^2\delta \\ &= \cos^2\delta\left(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha\right) + \operatorname{sen}^2\delta \\ &= \cos^2\delta + \operatorname{sen}^2\delta = 1 \end{aligned}$$

Asi que podemos llegar a cualquier punto de la esfera por sus dos coordenadas, latitud α y altitud δ, pero para el "polo norte", $\mathbf{e}_3$, y el "polo sur", $-\mathbf{e}_3$, la latitud no está bien definida; cualquiera es buena. Los mapas planos de la tierra usan estas coordenadas, pero entonces los polos "son" las lineas horizontales extremas y las distancias no corresponden a las distancias reales en la esfera. Tampoco las lineas rectas en un mapa corresponden a las trayectorias más cortas en la esfera.

5.3.1 Geodésicas

Consideremos dos puntos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en la esfera $\mathbb{S}^2$, ¿cuál será la trayectoria más corta para ir de $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$? Nos referimos a la trayectoria dentro de $\mathbb{S}^2$, es decir, sin salir nunca de la esfera, como si fueramos una hormiguita sobre ella o un humano en la tierra. En $\mathbb{R}^3$ la trayectoria más corta es el segmento $\overline{\mathbf{uv}}$ entre los puntos; pero este inmediatamente deja de estar en la esfera, su interior cae dentro del interior de la bola sólida. Lo que más se parece al segmento $\overline{\mathbf{uv}}$ dentro de la esfera es su proyección



desde el origen, su sombra en la esfera pensando que el centro de la esfera, el origen, es un foco. Pues entre más grande sea el radio de un círculo más se parece localmente a una recta y los círculos más grandes que hay en la esfera son los que tienen su centro en el origen, y que por tanto tienen radio uno.

No vamos a demostrar que las trayectorias más cortas (o eficientes) dentro de la esfera son los *círculos máximos* (i.e., intersección de la esfera con planos por el origen) pues requiere herramientas de cálculo. Pero las vamos a tomar como definición de *líneas esféricas* (que aunque suene contradictorio, viene de "líneas en la esfera") siguiendo la intuición de que son lo más parecido a las líneas rectas dentro de $\mathbb{S}^2$.

Definición 5.3.1 Una *línea* en la esfera, o una *línea esférica* es la intersección de $\mathbb{S}^2$ con un plano por el origen.

Tenemos entonces que por dos puntos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en la esfera $\mathbb{S}^2$ pasa una línea esférica. Pues si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no son paralelos, entonces generan un plano (por el origen) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ de tal manera que la línea esférica

$$\xi = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \cap \mathbb{S}^2$$

los contiene a ambos. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{u} = t\,\mathbf{v}$, pero entonces por estar ambos en la esfera se tiene

$$1 = |\mathbf{u}| = |t\,\mathbf{v}| = |t|\ |\mathbf{v}| = |t|$$

y por tanto $t = \pm 1$: o bien $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son iguales, o bien son *antipodas*, es decir, $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$. Hemos demostrado que por dos puntos (distintos) no antipodas pasa una única línea esférica. Pero obsérvese además que toda línea que pasa por un punto $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^2$ también pasa por su punto antipoda $-\mathbf{u}$, asi que por cualquier par de puntos pasa una línea que además es única si y sólo si no son antipodas.

Esta condición es muy parecida a la de la geometría clásica donde por cualquier par de puntos pasa una recta.