Tema 1.- ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

Ampliación de Matemáticas
Ingeniería Técnica Industrial. Especialidad en Electrónica Industrial.

Índice General

1 Ecuaciones diferenciales ordinarias. Definiciones y Terminología

Una *ecuación diferencial* es una ecuación cuya incógnita es una función y en la que aparecen algunas derivadas de esa función. Si la función que interviene tiene sólo una variable independiente, la ecuación se llama *ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.)*. Si la función tiene varias variables independientes, se dice que es una *ecuación diferencial en derivadas parciales (E.D.P.)*. En este tema restringimos nuestra atención a las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Además del tipo (ordinaria o parcial), las ecuaciones diferenciales se clasifican según su orden. El *orden* de una ecuación diferencial viene determinado por la derivada de orden más alto que aparece en dicha ecuación. En su forma más general una ecuación diferencial de orden n se puede escribir como

$$F\left(x, y, y', \dots y^{n)}\right) = 0.$$

Veamos algunos ejemplos:

Ecuación	**Tipo**	**Orden**
1) $y''' + 4y = 2$	Ordinaria	3
2) $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -32$	Ordinaria	2
3) $(y')^2 - 3y = e^x$	Ordinaria	1
4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	Parcial	2
5) $y - \text{sen } y' = 0$	Ordinaria	1

Una función $y = f(x)$ se dice que es una *solución* de una ecuación diferencial si la ecuación se satisface al sustituir, en ella, y y sus derivadas por $f(x)$ y sus derivadas respectivas. Por ejemplo,

1. Se puede comprobar que $y = \ln x$ es una solución de la ecuación $xy'' + y' = 0$ en el intervalo $(0, \infty)$.
2. Se puede comprobar que $y = 1/(x^2 - 1)$ es una solución de $y' + 2xy^2 = 0$ en el intervalo $(-1, 1)$, pero no en ningún otro intervalo mayor que contenga a éste.
3. Se puede probar que toda solución de la ecuación $y' + 2y = 0$ es de la forma $y = Ce^{-2x}$.

A partir de ahora nos centraremos fundamentalmente en dos cuestiones:

- ¿qué ecuaciones diferenciales tienen solución?
- ¿cómo obtener las soluciones?

Los siguientes ejemplos nos muestran distintas situaciones:

– Hay E.D.O. que carecen de soluciones. Así, por ejemplo, carece de soluciones de valor real la ecuación

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$

– Hay E.D.O. que tienen una única solución. Esto le sucede, por ejemplo, a la ecuación

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 0$$

que sólo tiene la solución $y = 0$.

– Hay ecuaciones diferenciales que poseen infinitas soluciones. Así ocurre en los dos siguientes casos:

De la ecuación $y'' - 5y' + 6y = 0$ son soluciones todas las funciones que se pueden expresar de la forma $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$, siendo c_1 y c_2 constantes cualesquiera.

De la ecuación $(y')^2 - xy' + y = 0$ son soluciones todas las funciones $y = cx - c^2$ con c constante, y también lo es $y = \dfrac{x^2}{4}$.

Las ecuaciones diferenciales que vamos a estudiar poseen por lo general infinitas soluciones, y muchas de estas soluciones se pueden escribir mediante una única expresión. Suele ocurrir que muchas de las soluciones de una ecuación diferencial de orden n se puedan dar mediante una expresión del tipo

$$G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0 \qquad (*)$$

que incluye n parámetros $c_1, c_2, \ldots, c_n$. En dicho caso, la familia n-paramétrica de funciones que define $(*)$ y que, geométricamente, representa una familia de curvas, la denominaremos *solución general de la ecuación diferencial.* Así, por ejemplo, para la ecuación

$$(y')^2 - xy' + y = 0$$

la familia uniparamétrica $y = cx - c^2$ es lo que hemos denominado *solución general,* aunque dicha expresión no abarque la solución $y = x^2/4$.

Llamaremos *solución particular* de una ecuación diferencial a cada una de las soluciones que forman parte de su solución general, y que se obtendrán dando valores particulares a los parámetros que contiene la solución general. Las soluciones, si las hay, que no están incluidas en la solución general las denominaremos *soluciones singulares.*

2 Problemas de valor inicial. Teorema de existencia y unicidad de soluciones.

A continuación vamos a estudiar una ecuación diferencial surgida de un problema físico concreto.

Si se lanza un objeto hacia arriba y se ignora el efecto del aire (es decir, se supone que no hay rozamiento ni corrientes de aire que puedan ejercer alguna influencia en la marcha del objeto), la única fuerza que actúa sobre él es la gravitatoria. Por ello, si es a la aceleración del objeto y m su masa, la segunda ley de Newton se puede escribir así:

$$ma = -mg \Longleftrightarrow a = -g$$

Ahora, llamando v a la velocidad del objeto, la igualdad anterior puede escribirse en la forma $\dfrac{dv}{dt} = -g$. Así pues, resolviendo esta ecuación diferencial determinaremos la velocidad del objeto en cada instante. Por simple inspección, se ve que la ecuación tiene infinitas soluciones, y se tiene

$$v(t) = -gt + k$$

Hemos obtenido la solución general de la ecuación diferencial, y en ella el parámetro k aparece como consecuencia de la integración. Si hacemos $t = 0$, se obtiene $v(0) = k$, así que el parámetro k se puede interpretar como la velocidad con que se lanza el objeto.

Obsérvese que aunque el fenómeno está descrito por la segunda ley de Newton, y en ella no figura para nada la velocidad inicial, en un problema real, al imprimir al objeto una velocidad inicial $v(0)$ dada, estamos eligiendo de entre todas las soluciones de la ecuación diferencial, precisamente aquélla para la que el valor del parámetro k coincide con $v(0)$.
Por ello, en todo problema real, a la ecuación diferencial que lo modeliza habrá que añadir unas condiciones complementarias que determinen concretamente el fenómeno que se estudia.

Una ecuación diferencial junto con condiciones complementarias de la función desconocida y sus derivadas, todas dadas para el mismo valor de la variable independiente, constituye lo que llamaremos un *problema de valor inicial.* En concreto, para una ecuación diferencial de orden n, que en su forma más general se puede escribir

$$F(x, y, y', \dots, y^{n)}) = 0,$$

un problema de valor inicial es considerar, junto con dicha ecuación, n condiciones complementarias del tipo:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, \quad y^{n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Las condiciones complementarias se denominan *condiciones iniciales*. El término "condiciones iniciales" proviene de que, con frecuencia, en problemas donde interviene el tiempo, se conoce el valor de la variable dependiente o de alguna de sus derivadas en el instante inicial $t = 0$.

Una *solución de un problema de valor inicial* es una función que satisface tanto la ecuación diferencial como todas las condiciones complementarias.

Los siguientes ejemplos muestran varios problemas de valor inicial para ecuaciones diferenciales de primer orden:

1. El problema de valor inicial

   $$| y' | + | y | = 0, \quad y(0) = 1$$

   no tiene solución pues la única solución de la ecuación diferencial es $y = 0$, y ésta no verifica la condición inicial.

2. El problema de valor inicial

$$y' = 2x, \quad y(0) = 1$$

tiene una única solución que es $y = x^2 + 1$.

3. El problema de valor inicial

$$xy' = y - 1, \quad y(0) = 1$$

tiene como soluciones $y = 1 + cx$ donde c es una constante arbitraria.

Centrándonos ya en las **ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden**, veremos que el siguiente teorema nos muestra condiciones suficientes, pero no necesarias, para que el problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & \\ y(x_0) = y_0 & \text{(condición inicial)} \end{cases}$$

tenga una única solución definida al menos en un intervalo que contiene al punto x_0.

Teorema 2.1 ***(Teorema de Picard)*** *Si $f(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ son funciones continuas en un rectángulo R*

$$R = \{(x,y) : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\},$$

entonces para cada punto (x_0, y_0) interior de R existe una única solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

definida al menos en un intervalo que contiene al punto x_0.

Obsérvese que si la función f de la ecuación $y' = f(x,y)$ verifica las hipótesis del teorema anterior, entonces podemos garantizar que dicha ecuación posee infinitas soluciones, aunque sólo habrá una solución que describa una curva en el plano que pase por el punto (x_0, y_0).

Por otra parte, se deberá tener presente desde ahora que aunque se tenga la certeza de que una ecuación diferencial tiene soluciones, generalmente la ecuación sólo se podrá resolver por métodos aproximados. Esto significa que sólo podremos obtener "aproximaciones" de sus soluciones.

3 Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

A continuación estudiaremos algunos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden para las que se cuenta con métodos de resolución, y que aparecen frecuentemente en las aplicaciones.

3.1 Ecuaciones de variables separables

En primer lugar, observemos que una E.D.O. de primer orden que es fácil resolver es

$$y' = f(x) \tag{1}$$

donde f es una función integrable. Para resolverla basta integrar ambos miembros con respecto a x y así se obtiene

$$y = \int f(x)dx + c \tag{2}$$

De modo que su solución general viene dada por (2) , y en ella se recogen todas las soluciones de la ecuación (1).

Más generalmente, toda ecuación de primer orden $y' = f(x, y)$ en la que y' pueda expresarse como producto de dos funciones, una que depende sólo de la variable x, y otra que depende sólo de la variable y, esto es, de la forma

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)} \tag{3}$$

se llama *ecuación de variables separables.*

Para resolver (3) se multiplican ambos miembros por $h(y)$ para obtener

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{4}$$

Ahora se observa que si $y = f(x)$ es una solución de (4), al tener que verificar dicha ecuación, entonces cumple

$$h(f(x))f'(x) = g(x)$$

por lo que al integrar se obtendrá

$$\int h(f(x))f'(x)dx = \int g(x)dx + c \tag{5}$$

Pero como $dy = f'(x)dx$, entonces (5) se puede escribir así:

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c \tag{6}$$

De modo que (6) constituye una familia uniparamétrica de soluciones, que generalmente vienen expresadas de forma implícita.

El razonamiento anterior nos sugiere un método para resolver la ecuación (3):
De la ecuación (3) pasamos a $h(y)dy = g(x)dx$ y finalmente integraremos ambos miembros para obtener la solución general de la ecuación dada.

NOTA.- Las ecuaciones $y' = g(x)h(y)$, $\quad y' = \dfrac{h(y)}{g(x)}$ también son de variables separables y se resuelven de forma similar.

Ejemplo 3.1 *Resolvamos la ecuación de variables separables* $y' = y^2 - 4$.

Escribimos la ecuación en la forma $\dfrac{1}{y^2-4}dy = dx$. *A continuación integramos ambos miembros, para lo cual utilizaremos*

$$\frac{1}{y^2-4} = \frac{-1/4}{y+2} + \frac{1/4}{y-2}$$

Así se obtendrá

$$-\frac{1}{4}\ln|y+2| + \frac{1}{4}\ln|y-2| = x + c_1 \Longrightarrow -\ln|y+2| + \ln|y-2| = 4x + 4c_1 \Longrightarrow$$

$$\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = 4x + c_2 \Longrightarrow \left|\frac{y-2}{y+2}\right| = e^{4x+c_2} = c_3 e^{4x} \Longrightarrow \frac{y-2}{y+2} = ce^{4x}, \qquad \textit{con } c \in \mathbb{R}^*.$$

Finalmente, despejando

$$y = 2\frac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}}$$

Obsérvese que si ahora buscásemos la única solución tal que $y(0) = -2$*, al sustituir* $x = 0, \quad y = -2$*, en la expresión anterior, llegaríamos al absurdo* $-1 = 1$*. Esto nos indica que hemos perdido en el proceso de resolución la solución de este problema de valor inicial. Pero, si repasamos los cálculos, se observa que se dividió por* $y^2 - 4$*. Así, se consideró que* $y \neq 2, \quad y \neq -2$*. Luego en caso de ser* $y = 2$ *o bien* $y = -2$ *soluciones de la ecuación diferencial, las podríamos haber eliminado. Es fácil comprobar que, en este caso, tanto* $y = 2$ *como* $y = -2$ *son soluciones de la ecuación diferencial. La solución* $y = 2$ *se puede obtener de la solución general* $y = 2\frac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}}$ *para el valor* $c = 0$ *del parámetro, pero* $y = -2$ *no forma parte de dicha familia uniparamétrica. Sin embargo, es precisamente la solución* $y = -2$ *la que es la solución del problema de valor inicial planteado.*

3.2 Ecuaciones diferenciales homogéneas

Algunas ecuaciones diferenciales que no son separables se convierten en separables tras un cambio de variable. Este es el caso de las ecuaciones diferenciales de la forma $y' = f(x, y)$, siempre que f sea una función homogénea.

Definición 3.1 *Una función* $f(x, y)$ *se dice que es homogénea de grado* n *cuando verifica:*

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

para todos los puntos de un cierto conjunto.

Es fácil comprobar que toda función polinómica en las variables x, y, tal que todos sus sumandos son monomios de grado total n, es una función homogénea de grado n. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = x^5 + 7x^4y + x^2y^3 & \text{es homogénea de grado 5} \\ f(x,y) = x & \text{es homogénea de grado 1} \end{array}$$

También son funciones homogéneas las siguientes:

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = x^3e^{x/y} + y^2x & \text{es homogénea de grado 3} \\ f(x,y) = x^4\cos(x^2/y^2) - y^4\text{sen}(y/x) & \text{es homogénea de grado 4} \end{array}$$

Es inmediato observar que el cociente de dos funciones homogéneas del mismo grado es una función homogénea de grado cero. Además, se verifica que toda función homogénea de grado cero $f(x, y)$ se puede expresar de las siguientes formas:

$$f(x, y) = f(1, y/x) = f(x/y, 1)$$

Definición 3.2 *Se dice que la E.D.O. de primer orden $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ es homogénea cuando $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado.*

A la vista de la definición, podemos decir que toda ecuación homogénea se puede escribir de la forma $y'=f(x,y)$ donde $f(x,y)$ es homogénea de grado cero.

Veremos a continuación que toda ecuación homogénea $y'=f(x,y)$ se puede resolver realizando un cambio de variable. Si llamamos $z=y/x$ se tiene:

$$y'=z'x+z,$$

luego la ecuación diferencial se puede escribir en la forma:

$$z'x+z=f(x,y)$$

y al ser f homogénea de grado cero, como $f(x,y)=f(1,y/x)$, entonces escribimos la ecuación diferencial en la forma

$$z'x+z=f(1,z)$$

Esta última ecuación es de variables separables, por lo que resolviéndola se obtendrá la expresión de las funciones z de x que la verifican. Después, sustituyendo en dicha expresión la z por y/x, tendremos finalmente la expresión de las soluciones de la ecuación homogénea dada.

Ejemplo 3.2 *Resolvamos la ecuación homogénea*

$$y'=\frac{y+2xe^{-y/x}}{x}$$

En primer lugar, expresaremos el segundo miembro como función de y/x.

$$y'=\frac{y}{x}+2e^{-y/x}$$

Ahora, realizamos el cambio de variables $z=y/x$, con lo que al ser $y'=xz'+z$, la ecuación queda de la forma

$$xz'+z=z+2e^{-z}$$

Esta ecuación es de variables separables, y la integraremos como tal:

$$xz'+z=z+2e^{-z}\Longrightarrow xz'=2e^{-z}\Longrightarrow e^{z}z'=\frac{2}{x}\Longrightarrow\int e^{z}dz=\int\frac{2}{x}dx+C$$

$$\Longrightarrow e^{z}=2\ln|x|+C\Longrightarrow e^{z}=\ln x^2+C$$

Ahora, finalmente, se deshace el cambio de variable y tenemos:

$$e^{y/x}=\ln x^2+C$$

3.3 Ecuaciones exactas. Factores integrantes

Si la expresión $F(x,y)=C$ describe una familia uniparamétrica de funciones y de x, entonces derivando con respecto a x obtendremos una ecuación diferencial de la que dicha expresión es la solución general. La ecuación diferencial es:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}y'=0\Longleftrightarrow\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy=0$$

Si ahora partimos de la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

siendo

$$M(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}, \quad N(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}, \quad \text{para alguna función } F(x,y),$$

podremos decir que $F(x,y) = C$ es su solución general. Este tipo de ecuaciones diferenciales se denominan *ecuaciones diferenciales exactas*. Así pues, cuando una ecuación diferencial es exacta, para obtener su solución general bastará encontrar la función $F(x,y)$.

El siguiente teorema nos permite identificar fácilmente ecuaciones diferenciales que son exactas.

Teorema 3.1 *(CRITERIO DE EXACTITUD)*
Si las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son continuas y tienen derivadas parciales de primer orden continuas en un rectángulo R

$$R = \{(x,y) : a < x < b, \quad c < y < d\},$$

entonces la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{7}$$

es una ecuación exacta en R si, y sólo si,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \qquad \textit{para todo } (x,y) \in R. \tag{8}$$

Demostración:-
$\Rightarrow$) Supongamos que la ecuación (7) es exacta en R. Esto significa que existe una función $F(x,y)$ tal que, $\forall (x,y)$ de R, verifica

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Así, al ser M y N funciones con derivadas parciales de primer orden continuas, podemos afirmar que las derivadas de segundo orden de F son continuas, y el teorema de Schwartz nos afirma que las derivadas cruzadas de segundo orden de F coinciden, es decir:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que se verifica (8) , y queremos comprobar que (7) es exacta. Para ello debemos encontrar una $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Por tenerse que verificar $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$, entonces $F(x,y)$ tiene que ser de la forma

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \psi(y)$$

para alguna función $\psi(y)$ que únicamente dependa de la variable y. Así todo consistirá en encontrar una $\psi(y)$ tal que se cumpla también la condición

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

lo cual supone que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right) + \psi'(y) = N(x,y)$$

Luego debe ser

$$\psi'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right) \tag{9}$$

y para comprobar que efectivamente existe esa $\psi(y)$ sólo habrá que justificar que el segundo miembro de (9) es una función únicamente de y, ya que así $\psi(y)$ se obtendrá de (9) por simple integración.
Por otra parte, si comprobamos que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right) = 0$$

entonces estará claro que el segundo miembro de (9) es efectivamente una función sólo de la variable y.

Calculemos ahora dicha derivada parcial, teniendo presente que se verifica (8)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right) &= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int M(x,y)dx \\ &= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\int M(x,y)dx \\ &= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = 0\end{aligned}$$

Así, queda probado que la ecuación diferencial es exacta. □

Ejemplo 3.3 *La ecuación diferencial* $y^3dx + 3xy^2dy = 0$ *es exacta, pues siendo*

$$M(x,y) = y^3, \quad N(x,y) = 3xy^2$$

se verifica

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3y^2.$$

Para resolverla utilizaremos la idea de la demostración del teorema anterior: Buscamos una función $F(x,y)$ *tal que*

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y^3 \quad y \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 3xy^2$$

La condición $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = y^3$ *la verifica la función*

$$F(x,y) = \int y^3dx + \psi(y) = y^3x + \psi(y)$$

siendo $\psi(y)$ una función únicamente de la variable y. Determinaremos dicha función imponiendo que verifique la condición $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 3xy^2$.

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 3xy^2 \Longleftrightarrow 3y^2x + \psi'(y) = 3xy^2 \Longleftrightarrow \psi'(y) = 0$$

Por tanto, si tomamos la función $\psi(y) = 0$, tenemos que una función $F(x,y)$ en las condiciones exigidas es

$$F(x,y) = y^3x$$

y de ahí que la solución general de la ecuación diferencial dada es:

$$y^3x = C$$

Hemos comprobado que la ecuación $y^3dx+3xy^2dy = 0$ es exacta. Si ahora dividimos ambos miembros por y^2, la ecuación resultante es:

$$ydx + 3xdy = 0$$

Esta nueva ecuación, que tiene las mismas soluciones que la anterior, se puede comprobar que no es exacta; sin embargo, para resolverla bastaría con multiplicarla por y^2 y resolver la ecuación exacta que se obtiene. Este hecho nos sugiere que determinadas ecuaciones que no son exactas se pueden resolver como tales cuando previamente se las multiplica por un cierto factor $\mu = \mu(x,y)$. Dicho factor recibe el nombre de *factor integrante.*

Definición 3.3 *La función $\mu = \mu(x,y)$ es un factor integrante de la ecuación diferencial*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

cuando la ecuación

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

es exacta.

Hallar los factores integrantes puede ser un problema difícil. Sin embargo, hay dos clases de ecuaciones diferenciales cuyos factores integrantes son sencillos: aquellas que poseen factores integrantes que dependen bien de x solamente o bien de y solamente. Es fácil probar lo siguiente:

1. Si $\dfrac{1}{N}\left[\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right] = h(x)$ es una función de x solamente, entonces la ecuación posee un factor integrante de la forma $\mu(x)$.
2. Si $\dfrac{1}{M}\left[\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right] = k(y)$ es una función de y solamente, entonces la ecuación posee un factor integrante de la forma $\mu(y)$.

Probaremos la primera afirmación, siendo la prueba de la segunda análoga.

Demostración de 1:

La ecuación no exacta $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ admite un factor integrante $\mu = \mu(x)$ cuando $\mu(x)M(x,y)dx + \mu(x)N(x,y)dy = 0$ sea exacta para alguna $\mu(x)$.

Para ello debe ocurrir que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(x\right)M\left(x,y\right)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(x\right)N\left(x,y\right)\right]$$

lo cual significa que se verifique:

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y}=\mu' N+\mu\frac{\partial N}{\partial x}\Longrightarrow\mu' N=\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]\Longrightarrow\frac{1}{\mu(x)}\mu'=\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]$$

Por lo que cuando $\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]$ sea sólo una función de x, será cuando exista un factor integrante de ese tipo. □

3.4 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Definición 3.4 *Se llama ecuación diferencial lineal de primer orden a toda ecuación de la forma*

$$a(x)y'+b(x)y=c(x) \tag{10}$$

donde $a(x), b(x)$ *y* $c(x)$ *son funciones únicamente de la variable* x.

Para las ecuaciones lineales de primer orden expresadas en su forma normal:

$$y'+p(x)y=q(x) \tag{11}$$

se cuenta con el siguiente teorema de existencia y unicidad de soluciones de un problema de valor inicial (caso particular del Teorema de Picard).

Teorema 3.2 *Si* $p(x)$ *y* $q(x)$ *son funciones continuas en algún intervalo* (a,b) *que contiene al punto* x_0*, entonces para cualquier* $y_0\in\mathbb{R}$ *existe una única solución del problema de valor inicial:*

$$\left\{\begin{array}{l} y'+p\left(x\right)y=q\left(x\right)\\ y\left(x_0\right)=y_0\end{array}\right.$$

Veremos a continuación dos métodos para resolver las ecuaciones lineales de la forma (11), que verifican las hipótesis del teorema anterior.

- **PRIMER MÉTODO: Mediante factores integrantes**

Las ecuaciones lineales siempre poseen un factor integrante del tipo $\mu=\mu(x)$, y por tanto, se pueden integrar utilizando este hecho.

En efecto, escribiendo la ecuación diferencial lineal (11) en la forma:

$$[p(x)y-q(x)]dx+dy=0$$

y llamando $M(x,y)=[p(x)y-q(x)]$, $\quad N(x,y)=1$ se tiene que

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=p\left(x\right)$$

es únicamente función de x y, utilizando un resultado anterior, podemos asegurar que la ecuación posee un factor integrante que sólo es función de x.

Por otra parte, se puede comprobar que un factor integrante de la ecuación (11) es:

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$$

• **SEGUNDO MÉTODO: Por variación de la constante**

Este método se basa en el hecho de que todas las soluciones de la ecuación lineal $y' + p(x)y = q(x)$ se pueden expresar como suma de la solución de la ecuación

$$y' + p(x)y = 0 \text{ (que se denomina ecuación } \textit{incompleta} \text{ u } \textit{homogénea}\text{)}$$

y una solución particular de la ecuación *completa* $y' + p(x)y = q(x)$.

La solución general de la ecuación homogénea $y' + p(x)y = 0$ se puede obtener fácilmente, teniendo en cuenta que es una ecuación de variables separables:

$$y' + p(x)y = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \Longrightarrow \ln|y| = \int -p(x)dx + c_1$$

$$\Longrightarrow y = Ce^{\int -p(x)dx} \text{ con } C \in \mathbb{R} \qquad \text{(solución general)}$$

ya que hay que considerar la solución $y = 0$ que se descartó en los pasos de resolución.

Para obtener una solución particular de la ecuación completa se puede utilizar el que se denomina *método de variación de la constante*, y que se basa en que siempre existe, como comprobaremos, una función $C(x)$ tal que

$$y = C(x)e^{\int -p(x)dx} \tag{12}$$

es una solución de la ecuación completa. Así, una vez determinada $C(x)$ se tendrá una solución particular de la ecuación completa. (Obsérvese que el nombre del método se debe a que la expresión (12) se obtiene de la solución general de la ecuación incompleta, considerando la constante ahora como una función).

Escribamos, para simplificar, la expresión (12) en la forma

$$y = C(x)\eta(x) \tag{13}$$

y comprobemos que la ecuación completa tiene una solución de este tipo.

La función $y = C(x)\eta(x)$ es solución de (11) cuando:

$$[C'(x)\eta(x) + C(x)\eta'(x)] + p(x)C(x)\eta(x) = q(x)$$

si, y sólo si,

$$C'(x)\eta(x) + C(x)[\eta'(x) + p(x)\eta(x)] = q(x)$$

y como $\eta(x)$ es solución de la ecuación incompleta

$$C'(x)\eta(x) = q(x)$$

Ahora, como $\eta(x) = e^{\int -p(x)dx}$ no se anula nunca, entonces integrando conseguimos que una $C(x)$ es

$$C(x) = \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx.$$

Y, por tanto,

$$y = e^{\int -p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx$$

es una solución particular de la completa.

Entonces, la solución general de la ecuación se puede expresar en la forma:

$$y = Ce^{\int -p(x)dx} + e^{\int -p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx.$$

4 Métodos numéricos para E.D.O. de primer orden

A menudo, existen problemas prácticos que conducen a ecuaciones diferenciales que no pueden resolverse mediante los procedimientos expuestos anteriormente o también a ecuaciones cuyas soluciones vienen expresadas en términos tan complicados que, con frecuencia, es preferible obtener una tabla de valores aproximados de la solución en los puntos de un determinado intervalo.

Si suponemos que existe una solución de una ecuación diferencial dada, entonces aquélla representa un lugar geométrico (curva) en el plano. En esta sección estudiaremos procedimientos numéricos que utilizan la ecuación diferencial para obtener una sucesión de puntos cuyas coordenadas aproximan las coordenadas de los puntos de la curva que efectivamente es la solución.

Dado un problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

se trata de obtener aproximadamente los valores de la solución, si existe, en un conjunto de puntos del intervalo $[a, b]$ que interese, entre los cuales ha de estar el punto $x = x_0$. Para ello, se fija un $h > 0$ y se obtiene un conjunto de puntos $\{x_0, x_1, ..., x_n\} \subset [a, b]$, de la forma

$$x_1 = x_0 + h, \qquad x_2 = x_0 + 2h, \qquad x_3 = x_0 + 3h, \quad \cdots, \qquad x_n = x_0 + nh$$

para los que se calcularán los valores aproximados de la solución $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la ecuación diferencial, con la condición $y(x_0) = y_0$. A la longitud h de cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ se le llama **paso**.

Una forma general de efectuar el cálculo de los valores aproximados de la solución en cada paso es mediante el uso de polinomios de Taylor

$$y(x+h) \approx y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \cdots + \frac{h^k}{k!}y^{k)}(x) \tag{14}$$

teniendo en cuenta que si el valor de h es pequeño, las potencias más altas $h^2, h^3, \ldots$ son muy pequeñas. Veamos algunos casos particulares.

4.1 Método de Euler

El **método de Euler** o método de las tangentes es una de las técnicas más simples. Consiste en considerar la aproximación

$$y(x+h) \approx y(x) + hy'(x) = y(x) + hf(x, y)$$

(en donde el miembro derecho se obtiene a partir de la ecuación diferencial dada) y el siguiente proceso de iteración. En el primer paso se calcula

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

que se aproxima a $y(x_1) = y(x_0 + h)$. En el segundo paso se calcula

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

que se aproxima a $y(x_2) = y(x_0 + 2h)$. Así sucesivamente, se calcula

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}),$$

que se aproxima a $y(x_n)$ y, de esta forma, obtenemos una tabla de valores aproximados de la solución.

A continuación veremos un ejemplo del método de Euler.

Ejemplo 4.1 *Usaremos el método de Euler para obtener el valor aproximado de* $y\,(0.5)$ *para la solución del problema de valor inicial*

$$\begin{gathered} y' = (x+y-1)^2 \\ y\,(0) = 2 \end{gathered}$$

Si tomamos $h = 0.1$*, se obtiene*

$$y_1 = y_0 + 0.1\,(x_0 + y_0 - 1)^2 = 2 + (0.1)\,1 = 2.1$$

lo cual es una estimación de $y\,(0.1)$. *Si calculamos ahora*

$$y_2 = y_1 + 0.1\,(x_1 + y_1 - 1)^2 = 2.2440$$

que es una estimación de $y\,(0.2)$.

En las tablas siguientes se muestran los demás valores para $h = 0.1$ *así como todos los cálculos para* $h = 0.05$.

Método de Euler con $h = 0.1$

x_n	y_n
0.00	2.0000
0.10	2.1000
0.20	2.2440
0.30	2.4525
0.40	2.7596
0.50	3.2261

Método de Euler con $h = 0.05$

x_n	y_n
0.00	2.0000
0.05	2.0500
0.10	2.1105
0.15	2.1838
0.20	2.2727
0.25	2.3812
0.30	2.5142
0.35	2.6788
0.40	2.8845
0.45	3.1451
0.50	3.4823

El método de Euler no es lo suficientemente exacto para justificar su uso en la práctica. Se trata de un método de primer orden ya que sólo se consideran en la aproximación los términos constantes y el término que contiene a la primera potencia de h. La omisión de los demás términos produce un error denominado **error de truncamiento** del método.

Como el proceso es iterativo y el valor aproximado y_i se basa en el anterior y_{i-1}, al error cometido en un paso se le llama **error de truncamiento por paso** o error de truncamiento local que en el método de Euler sería del orden de h^2. Estos errores locales se van acumulando a medida que se opera en los subintervalos sucesivos, generando el error de truncamiento global. Además, existen también los errores de redondeo que afectan a la exactitud de los valores que se van obteniendo.

4.2 Método de Euler mejorado

Si se consideran polinomios de Taylor de mayor orden en (14), se obtienen métodos numéricos de mayor precisión. Pero existe un problema práctico. Si se sustituye $y' = f\,(x,y)$ en (14), se obtiene

$$y\,(x+h) \approx y\,(x) + hf\,(x,y) + \frac{h^2}{2!}f'\,(x,y) + \frac{h^3}{3!}f''\,(x,y) + \cdots + \frac{h^k}{k!}f^{k)}\,(x,y)$$

en donde, como y en f depende de x

$$f' = f_x + f_y y' = f_x + f_y f$$

surge el principal inconveniente que es la necesidad de calcular en cada paso las derivadas parciales de la función $f(x,y)$. Ahora la estrategia general es evitar el cálculo de tales derivadas y sustituirlas calculando f para uno o varios valores auxiliares de (x,y) elegidos adecuadamente con el fin de obtener una gran exactitud. A continuación se analizan dos de tales métodos que tienen gran importancia práctica.

El primer método se denomina **método de Euler mejorado** o **método de Heun**. En cada paso de este método primero se calcula el valor auxiliar

$$y_{n+1}^{*} = y_n + hf\left(x_n, y_n\right) \tag{15}$$

y luego se calcula el nuevo valor

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h\left[f\left(x_n, y_n\right) + f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{*}\right)\right]. \tag{16}$$

El método de Euler mejorado es un método **predictor-corrector**, porque en cada paso primero se predice un valor mediante (15) y luego se corrige mediante (16). Es un método de segundo orden porque el error por truncamiento por paso es de orden h^3.

Ejemplo 4.2 *Usaremos el método de Euler mejorado para obtener el valor aproximado de* $y\left(0.5\right)$ *para la solución del problema de valor inicial del ejemplo anterior*

$$\begin{array}{c} y' = \left(x+y-1\right)^2 \\ y\left(0\right) = 2 \end{array}$$

Para $h = 0.1$*, se obtiene*

$$y_1^{*} = y_0 + 0.1\left(x_0 + y_0 - 1\right)^2 = 2.1$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + (0.1)\,\frac{\left(x_0+y_0-1\right)^2 + \left(x_1+y_1^{*}-1\right)^2}{2} \\ &= 2 + (0.1)\,\frac{1+1.44}{2} = 2.122 \end{aligned}$$

lo cual es ahora una estimación de $y\left(0.1\right)$.

En las tablas siguientes se muestran los demás valores para $h = 0.1$ *así como todos los cálculos para* $h = 0.05$.

Método de Euler mejorado con $h = 0.1$

x_n	y_n
0.00	2.0000
0.10	2.1220
0.20	2.3049
0.30	2.5858
0.40	3.0378
0.50	3.8254

Método de Euler mejorado con $h = 0.05$

x_n	y_n
0.00	2.0000
0.05	2.0553
0.10	2.1228
0.15	2.2056
0.20	2.3075
0.25	2.4342
0.30	2.5931
0.35	2.7953
0.40	3.0574
0.45	3.4057
0.50	3.8840

4.3 Método de Runge-Kutta

Un método aún más exacto que el anterior es el **método de Runge-Kutta de cuarto orden** (hay métodos de Runge-Kutta de varios órdenes). Este método calcula en cada paso cuatro cantidades auxiliares y luego se calcula el nuevo valor

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4$$

Estas constantes k_1, k_2, k_3, k_4 se calculan de manera que el desarrollo anterior coincida con el polinomio de Taylor de cuarto orden. Como la deducción del método es bastante tediosa, solo damos los resultados:

$$\begin{array}{l} k_1 = hf\left(x_n, y_n\right) \\ k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 = hf\left(x_n + h, y_n + k_3\right) \\ x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \end{array}$$

Se puede demostrar que el error por truncamiento por paso es del orden de h^5 y el método es, en consecuencia, de cuarto orden.

Ejemplo 4.3 *Si usamos el método de Runge-Kutta de cuarto orden para obtener el valor aproximado de* $y\,(0.5)$ *para la solución del problema de valor inicial de los ejemplos anteriores obtenemos las siguientes tablas donde podemos comparar los valores aproximados que se obtienen con los valores reales*

Método de Runge-Kutta con $h = 0.1$

x_n	y_n	Valor real
0.00	2.0000	2.0000
0.10	2.1230	2.1230
0.20	2.3085	2.3085
0.30	2.5958	2.5058
0.40	3.0649	3.0650
0.50	3.9078	3.9082

Método de Runge-Kutta con $h = 0.05$

x_n	y_n	Valor real
0.00	2.0000	2.0000
0.05	2.0554	2.0554
0.10	2.1230	2.1230
0.15	2.2061	2.2061
0.20	2.3085	2.3085
0.25	2.4358	2.4358
0.30	2.5958	2.5958
0.35	2.7998	2.7997
0.40	3.0650	3.0650
0.45	3.4189	3.4189
0.50	3.9082	3.9082