CURVAS PLANAS, ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y COORDENADAS POLARES

Curvas planas y ecuaciones paramétricas.

- Una curva geométricamente hablando diremos que intuitivamente, es el conjunto de puntos que representan las distintas posiciones ocupadas por un punto que se mueve; si se usa el término curva por oposición a recta o línea poligonal, habría que excluir de esta noción los casos de, aquellas líneas que cambian continuamente de dirección, pero de forma suave, es decir, sin formar ángulos. Esto las distingue de las líneas rectas y de las quebradas. Estarían fuera de esta noción los casos de movimiento rectilíneo. Sin embargo, utilizando la definición matemática, una línea recta es un caso particular de curva.

Funciones paramétrica

- En algunos casos la ecuación de una función o de una relación no esta dada en la forma *y = f(x) o f(x; y) = 0,*
- como en las igualdades *y = 5x2 + 3x; o, x2 + y2 = 4, sino que esta determinada por un par de ecuaciones en*
- términos de una misma variable.

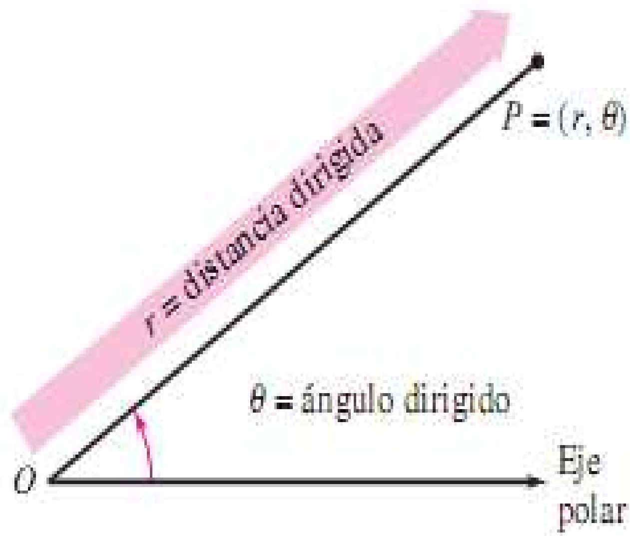
Derivada de una función dada paramétricamente

- Si una curva suave C está dada por la ecuaciones x=f(t) y y=g(t), entonces la pendiente de C en (x,y) es
- $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$, $dx/dt \neq 0$.
- Esto se da ya que cumple con el teorema que proporciona las condiciones necesarias para obtener la derivada de una función dada en forma paramétrica:
- *Sean f y g funciones derivables en un intervalo (t_1, t_2). Supongamos que f tiene una inversa derivable en ese intervalo. Entonces en cada punto donde $f'(t) \neq 0$, las ecuaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$ implican que existe una función derivable F tal que $y = F(x)$, y además* $D_x y = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{D_t y}{D_t x}$

Coordenadas polares.

- Hasta ahora las gráficas se han venido representando como colecciones de puntos (*x, y) en el sistema de coordenadas rectangulares. Las ecuaciones correspondientes a estas gráficas han estado en forma rectangular o en forma paramétrica. En esta sección se estudiará un sistema de coordenadas denominado sistema de coordenadas polares. Para formar el sistema de coordenadas polares en el plano, se fija un punto O, llamado polo (u origen), y a partir de O, se traza un rayo inicial llamado eje polar, como se muestra en la figura.*

A continuación, a cada punto *P en el plano se le asignan coordenadas polares (r, θ), como sigue.*



r = *distancia dirigida* de O a P

θ = *ángulo dirigido*, en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje polar hasta el segmento $\overline{OP}$

En coordenadas rectangulares, cada punto (x,y) tiene una representación única. Esto no sucede con las coordenadas polares. Por ejemplo, las coordenadas (r,θ) y (r,2π+θ) representan el mismo. También, como *r es una distancia dirigida, las coordenadas pueden representar el mismo punto. En general, el punto puede expresarse como:*

$(r,\theta) = (r,\theta+2n\pi)$

o

$(r,\theta) = (-r,\theta + (2n+1)\pi)$

Donde n es cualquier entero. Además, el polo está representado por (0,θ), donde θ es cualquier ángulo

Ecuaciones de curvas planas en coordenadas polares.

Se puede ubicar un punto en el plano conociendo su distancia a un punto fijo y su dirección con base en una recta fija.

Se vera la construcción de graficas que se representan en puntos en movimiento.

El objetivo es desarrollar únicamente la transformación de la ecuación cartesiana a

$x = \rho \cos\theta$ $y = \rho \sin\theta$

polar.

Nota: ; así mismo, ; ya que se emplean para obtener las coordenadas

•Ecuación polar de la circunferencia

- Sea $x^2 + y^2 = r^2$ la circunferencia dada.
- Sustituyendo los valores:

$$\rho^2 sin^2\theta + \rho^2 cos^2\theta = r^2$$

- Factor izando a "p" se obtiene:

$$\rho^2 (sin^2\theta + cos^2\theta) = r^2$$

- Como $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$ entonces:

$$\rho^2 = r^2 \therefore \; \rho = \pm r$$

que es la ecuación polar de la circunferencia.

Ecuación polar de la parábola

- Sea $y^2 = 4\rho x$ la ecuación dada.
- Sustituyendo "x" y "y":

$$\rho^2 sin^2\theta = 4\rho cos\theta$$

- Se divide entre "p" y despejando se tiene:

$$p = \frac{4cos\theta}{sin^2\theta}$$ que es la ecuación polar de la parábola.

$(1 - cos^2\theta)$

Ecuación polar de la elipse.

- $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$
- Sustituyendo:

$$b^2\rho^2 cos^2\theta + a^2\rho^2 sin^2\theta = a^2b^2$$

- Se factoriza:

$$\rho^2(b^2 cos^2\theta + a^2 sin^2\theta) = a^2b^2$$

- Se despeja:

$$\rho^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 cos^2\theta + a^2 sin^2\theta}$$

- Se divide ambos términos del quebrado por a^2 y sustituyendo $sin^2\theta$ por $(1 - cos^2\theta)$:

$$\rho^2 = \frac{b^2}{\frac{b^2}{a^2}cos^2\theta + \frac{a^2}{a^2}(1 - cos^2\theta)} = \frac{b^2}{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}cos^2\theta}$$

- Aplicando las propiedades de la elipse: $a^2 - b^2 = c^2$

$\frac{c^2}{a^2} = e^2$, y

$$\rho^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 cos^2\theta}$$

$$\rho = \pm\frac{b}{\sqrt{e^2 cos^2\theta - 1}}$$

- Por lo tanto la ecuación de la elipse es:

Ecuación polar de la hipérbola

- $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$
- Realizando los pasos anteriores se tiene:

  $\rho^2 = \dfrac{b^2}{e^2cos^2\theta - 1} \therefore \rho = \pm\dfrac{b}{\sqrt{e^2cos^2\theta - 1}}$ que es la ecuación polar de la hipérbola