1.1 Definición de Vectores en R^2 y R^3 y su generalización.

Anteriormente vimos que un vector es un objeto matemático con dirección y magnitud.

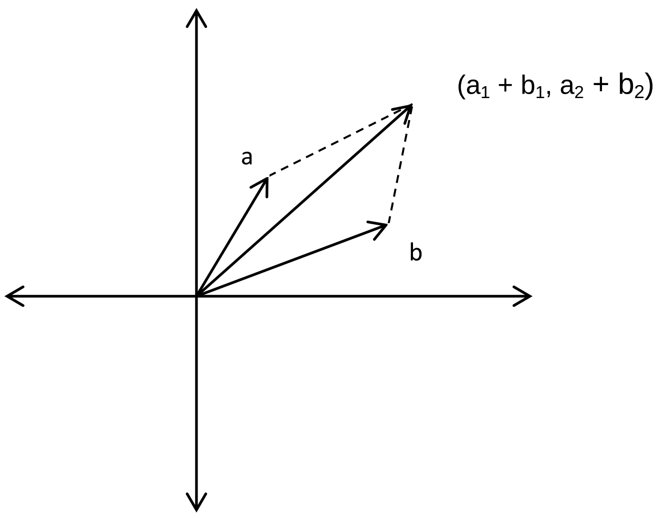
La palabra "vectores" se refiere a los elementos de cualquier R^n. En R^1 = R el vector es un punto, que llamamos escalar. En R^2 el vector es de la forma $(x1, x2)$ y en R^3 el vector es de la forma $(x1, x2, x3)$.

En R^2:

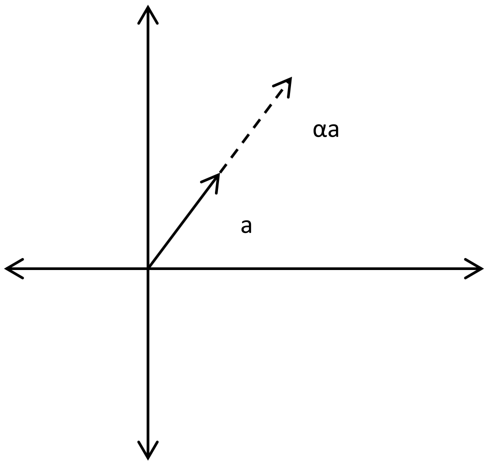
1.- La suma de dos vectores se define por: sean a y b vectores en R^2, entonces $a + b = (a1, a2) + (b1, b2) = (a1 + b1, a2 + b2)$.

2.- El producto escalar se define por: sea α Є R y a un vector en $R^{2,}$ entonces $\alpha a = \alpha\,(a1, a2) = (\alpha\, a1, \alpha\, a2)$.

Veamos el significado geométrico de la suma de vectores y el producto escalar en R^2.



Observa que si $a = (a1, a2)\; y\; b = (b1, b2)$, entonces la suma de los vectores $a + b = (a1, a2) + (b1, b2) = (a1 + b1, a2 + b2)$. El cual se obtiene trasladando la representación de los vectores a y b. De manera, que se puede obtener $a + b$ dibujando un paralelogramo. A esta regla de suma se le llama la regla del paralelogramo.



Para el producto escalar αa, se puede observar que si $\alpha > 0$ se alarga o se acorta el vector a por un factor α. Si $\alpha < 0$ se invierte la dirección del vector a.

En R^3:

1.- La suma de vectores se define por: sean a, b Є R^3, entonces $a + b = (a1, a2, a3) + (b1, b2, b3) = (a1 + b1, a2 + b2, a3 + b3)$.

2.- El producto escalar se define por: sea α Є R y a un vector en $R^{3,}$ entonces $\alpha a = \alpha\,(a1, a2, a3) = (\alpha\, a1, \alpha\, a2, \alpha a3)$.

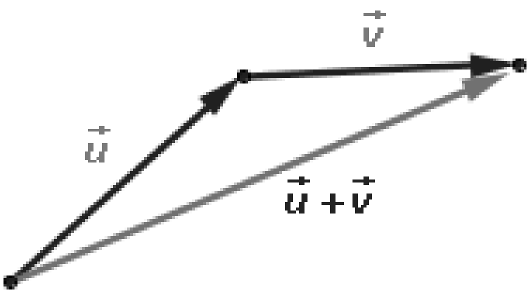
Definición: Sean a y b vectores en R^n, tal que $a = (a1, a2, a3, \ldots, an)\; y\; b = (b1, b2, b3, \ldots, bn)$. El producto interno de a y b representado por $a \cdot b\; o < a, b >$, es el escalar que se obtiene multiplicando los componentes correspondientes de los vectores y sumando luego los productos resultantes, esto es:

$$A \cdot b = < a \cdot b > = (a1 \cdot b1 + a2 \cdot b2 + a3 \cdot b3 + \ldots + an \cdot bn).$$

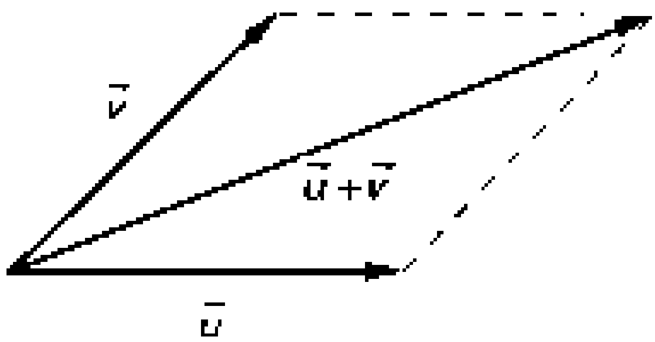
Los vectores a y b se llaman ortogonales si su producto interno es igual a cero.

1.2 Operaciones con vectores

Suma de vectores: Para sumar dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{u}$ se escogen como representantes dos vectores tales que el extremo final de uno coincida con el extremo origen del otro vector.



Regla del paralelogramo: Se toman como representantes dos vectores con el origen en común, se trazan rectas paralelas a los vectores obteniéndose un paralelogramo cuya diagonal coincide con la suma de los vectores.



Para sumar dos vectores se suman sus respectivas componentes.

$\vec{u} = (u_1\ ,\ u_2)$ $\quad$ $\vec{v} = (\ v_1\ ,\ v_2\ )$

$\vec{v} + \vec{v} = (\ u_1 +\ v_1\ ,\ u_2 +\ v_2)$

Resta de vectores

Para restar dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se suma $\vec{u}$ con el opuesto de $\vec{v}$.

Las componentes del vector resta se obtienen restando las componentes de los vectores.

$$\vec{u} = (u_1 \, , \, u_2) \;\; \vec{v} = (\, v_2 \, , \, v_2 \,)$$

$$\vec{v} - \vec{v} = (\, u_1 - \, v_1 \, , \, u_2 - \, v_2)$$

EJEMPLO:

$\vec{u} = (-2 \, , \, 5)$ $\qquad$ $\vec{u} = (3 \, , -1)$

$\vec{v} + \vec{v} = (-2 + 3 \, , 5 - 1) = (1 \, , 4)$

$\vec{v} - \vec{v} = \big(-2 - 3 \, , 5 - (-1)\big) = (-5 \, , 6)$

Producto de un número por un vector

El producto de un número k por un vector $\vec{u}$ es otro vector:

1.- De igual dirección que el vector $\vec{u}$

2.- Del mismo sentido que el vector $\vec{u}$ si k es positivo.

3.-De sentido contrario del vector $\vec{u}$ si k es negativo.

4.- De módulo $|k| \, . |\vec{u}|$

Las componentes del vector resultante se obtienen multiplicando por K las componentes del vector.

$\vec{u} = (u_1 \, , \, u_2)$

$k \, . (u_1 \, , \, u_2) = (k \, . \;\; u_1 \, , \;\, k \, . \, u_2)$

1.3 Producto Escalar y Vectorial

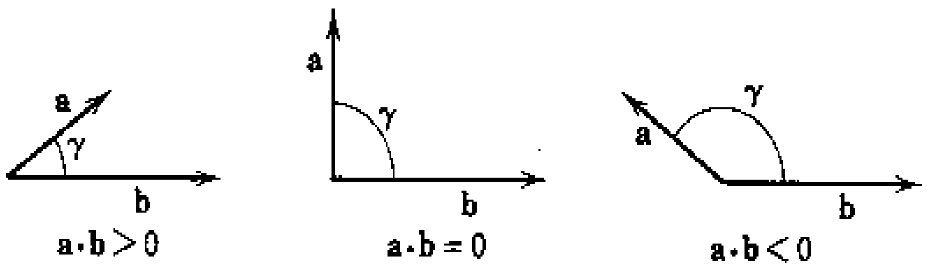
Producto escalar

El producto interior o producto escalar de dos vectores a y b en el espacio tridimensional

a · b = |a| |b| cos γ $\qquad$ cuando a ≠ 0, b ≠ 0

a · b = 0 $\qquad$ cuando a = 0 o b = 0

Aquí γ ($0 \leq \gamma \leq \prod$) es el ángulo entre a y b (calculado cuando los vectores tienen sus puntos iniciales coincidentes).



Angulo entre vectores.

El valor del producto interior (escalar) es un escalar (un número real) y esto motiva el término producto escalar. El coseno del ángulo γ puede ser positivo, cero o negativo, lo mismo se aplica al producto interior.

Observamos que el coseno es cero cuando γ **=** 0.5 $\prod$ = 90°.

Teorema de Ortogonalidad.

Dos vectores diferentes de cero son ortogonales sí, y sólo si, su producto interior (escalar) es cero.

Se tienen las siguientes propiedades:

$$|a| = \sqrt{a\,.\,a} \qquad\qquad a \geq 0$$

$$\cos\gamma = \frac{a\,.\,b}{\lfloor a\rfloor\,\lfloor b\rfloor} = \frac{a\,.\,b}{\sqrt{a\,.\,a}\,\sqrt{b\,.\,b}}$$

$(q_1\,a + q_2 b)\,.\,c = q_1 a\,.\,c + q_2 b\,.\,c$	Linealidad
$a\,.\,b = b\,.\,a$	Simetría
$a\,.\,a = 0$	Solo si $a = 0$
$a\,.\,a \geq 0$	Ser positivo definido
$(a + b)\,.\;c = a\,.\,c + b\,.\,c$	Distributiva
$\lvert a\,.\,b\rvert \leq \lvert a\rvert\,\lvert b\rvert$	Desigualdad de Schwarz
$\lvert a + b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	Desigualdad del triángulo

$|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$ Igualdad del paralelogramo

Si los vectores a y b se representan en términos de sus componentes;

$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ $\quad b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$

Su producto interior está por la siguiente fórmula:

$a\,.\,b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Proyección

Consideremos dos vectores a y b diferentes de cero, denotando por el γ ángulo entre ellos, el número real:

$$p = |\boldsymbol{a}|\, cos\ \gamma$$

Se llama componente de a en la dirección de b o proyección de a en la dirección de b. Si a = 0, entonces γ no está definido y se hace $p = 0$.

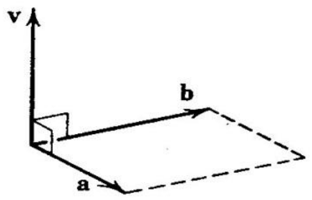
$|p|$ Es la longitud de la proyección ortogonal de la a sobre una recta 1 en la dirección de b, p puede ser positiva, cero o negativa.

Producto Vectorial

Varias aplicaciones sugieren la introducción de otro tipo de multiplicación vectorial en la que el producto de dos vectores sea nuevamente un vector. Este producto vectorial de los dos vectores a y b se escribe

$$a\ x\ b$$

Y es un vector definido como sigue.



Producto vectorial.

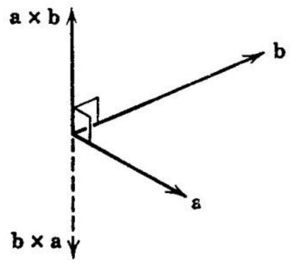
Si a y b tienen la misma dirección, son opuestos o uno de ellos es el vector cero, entonces su producto vectorial es cero $(v = 0)$. En cualquier otro caso, v es el vector cuya longitud es igual al área del paralelogramo con a y b como lados adyacentes y cuya dirección es perpendicular tanto a a como a b y es tal que a, b, v, en ese orden, forman una terna derecha o triada derecha.

El término derecho se debe al hecho de que los vectores a, b, v, en ese orden, toman la misma orientación que los dedos pulgar, índice y medio de la mano derecha cuando se colocan como se muestra en la figura de al lado. También puede decirse que si a se gira hacia la dirección de b, describiendo el ángulo $a < P$, entonces v avanza en la misma dirección que un tornillo de rosca derecha, si este se gira en el mismo sentido.

Terna derecha de los vectores a, b, v.

El paralelogramo donde a y b son los lados adyacentes tiene el área $|a|\ |b|\ sin\ \gamma$. Se obtiene

$|v|\ =\ |a|\ |b|\ sen\ g$



Anticonmutatividad de la multiplicación vectorial.

El producto vectorial es anticonmutativo, si $a\ x\ b\ =\ v\ y\ b\ x\ a\ =\ w$ Entonces $|\boldsymbol{v}|\ =\ |\boldsymbol{w}|$ y para que b, a, w formen una terna derecha debe cumplirse que $w\ =\ -v$. De lo anterior se obtiene $b\ x\ a\ =\ -\,(a\ x\ b)$.

La multiplicación vectorial de vectores no es conmutativa, sino anticonmutativa.

1.4 TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

Los triples productos aparecen cuando se desea definir multiplicaciones entre tres vectores. Una expresión de la forma $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ no tiene mucho sentido porque el resultado del primer producto es un escalar.

$$(\vec{u}\,.\,\vec{v}).\vec{w} = r\,.\,\vec{w}$$

Y no es posible calcular el producto punto entre un número (escalar) y un vector. Sin embargo, cuando los vectores son elementos de R^3, podemos combinar el producto punto con el producto cruz para definir una nueva operación entre tres vectores que se denomina triple producto escalar pues el resultado será una cantidad escalar. Es importante indicar escalar para diferenciarlo del triple producto vectorial que se obtiene al multiplicar tres vectores usando únicamente el producto cruz y cuyo resultado es, por tanto un vector.

El triple producto escalar de los vectores $\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}$ se denota por $|\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}|$ y está definido como:

$$\lfloor \vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w} \rfloor = u\,.\,(\vec{v}\,x\,\vec{w})$$

Cálculo del triple producto escalar

Para hallar una fórmula que permita calcular el valor del triple producto escalar a partir de las coordenadas de los vectores procedemos a realizar la sustitución del producto cruz:

$$\lfloor \vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w} \rfloor = u\,.\,(\vec{v}\,x\,\vec{w})$$

$$= \vec{u}\,.\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ v1 & v2 & v3 \\ w1 & w2 & w3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{u}\,.\left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \vec{k}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} u_3$$

En donde hemos usado que:

$$\vec{u}\,.\vec{\imath} = u_1 \;\; \vec{u}\,.\vec{\jmath} = u_2 \; \vec{u}\,.\vec{k} = u_3$$

Sin embargo, la última expresión obtenida es precisamente el desarrollo de un determinante, esto es:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$